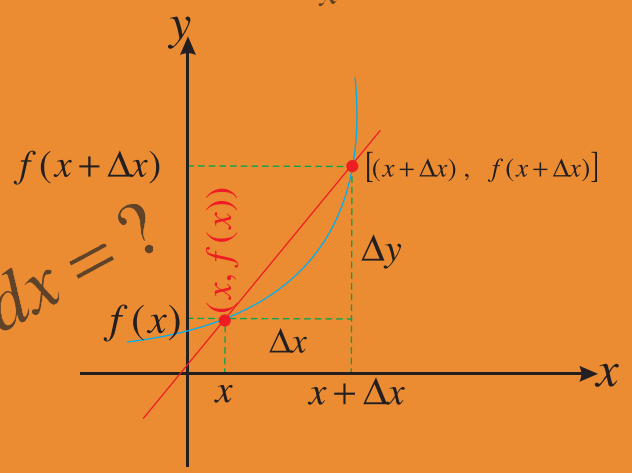
د پوهنې وزارت

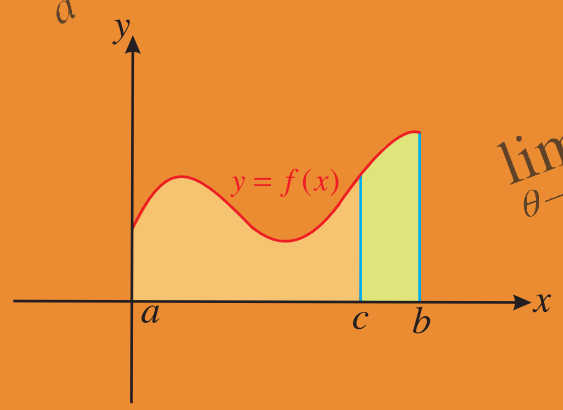
ریاضي ۱۲

ټولګی

$$\lim_{x \to a} f(x) = ?$$



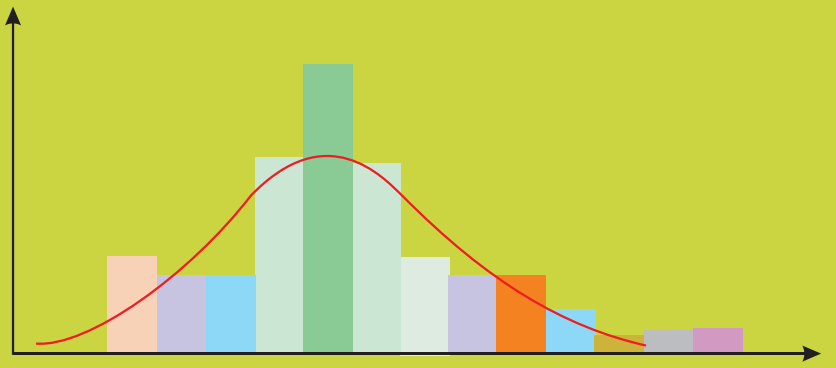
$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$



$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = ?$$

د چاپ کال: ۱۳۹۸

ریاضي ۱۲ ټولګی



ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې
هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی
د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو
د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، گوجر دي
پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي
هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي
لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به
لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم

د پوهنې وزارت

ریاضي ۱۲

ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هـ . ش.

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: ریاضي

مؤلفین: د تعلیمي نصاب د ریاضیاتو د څانګې علمي او مسلکي غړي

اډیټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډیټ علمي او مسلکي غړي

ټولګی: دولسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف لوی ریاست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوي ریاست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپ‌خونه:

برېښنالیک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوریت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې یې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلندکیږي.

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراګانې د هېواد د پوهنیز نظام شېرګوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وګړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

فهرست

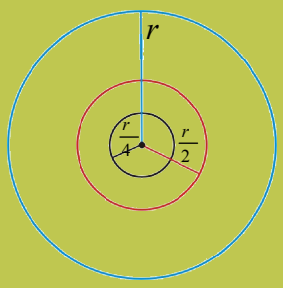
سرلیکونه	مخونه
لومړی څپرکی لېمیټ	۱-۴۰
• د لېمیټ مفهوم	
• د ښي او کیڼې خوا لېمیټونه	
• د لېمیټ خاصیتونه	
• د نسبتي تابع ګانو لېمیټونه	
• د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل	
• د $\infty - \infty$ او $0.\infty$ مبهم شکلونه	
• د $0^0, \infty^0, 1^\infty$ مبهم شکلونه	
• د مثلثاتي تابع ګانو لېمیټ	
• د تابع ګانو متمادیت	
• د متمادي تابع ګانو خاصیتونه	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	
دویم څپرکی مشتقات.....	۴۱-۸۲
• د یوې تابع مشتق	
• د مشتق هندسي تعبیر	
• د مشتق قوانین	
• د مرکبو تابع ګانو مشتق	
• د مثلثاتي تابع ګانو مشتق	
• ضمني مشتقات	
• لوړ مرتبه یي مشتقات	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	
دریم څپرکی د مشتق د استعمال ځایونه.....	۸۳-۱۳۲
• د یوې تابع بحراني ټکی(اعظمي او اصغري)	
• د انعطاف د ټکي ټاکل له دویم مشتق څخه په ګټې اخېستنې سره	
• د منحنيګانو رسمول	
• د توابعو د ګرافونو مجانبونه	
• د هوموګرافیک تابع ګانو ګراف	
• د دریمې درجې یو مجهوله تابع ګراف	
• د رول قضیه	
• د متوسط قیمت قضیه	
• د لوپیټال قاعده	
• د بحراني ټکو تطبیق	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	

سرلیکونه	مخونه
څلورم څپرکی انتیګرال	۱۳۳-۱۷۲
• د ریمان مجموعه	
• د انتیګرال مفهوم	
• د غیرمعین انتیګرال خواص	
• معین انتیګرال	
• د معین انتیګرال خواص	
• د مشتق او انتیګرال اساسي قضیې	
• په تعویضي طریقې سره انتیګرال نیول	
• په قسمي طریقې سره انتي ګرال نیول	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	
پنځم څپرکی د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق او انتیګرال	۱۷۳-۱۹۸
• د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانو مشتق	
• د معکوسو تابع ګانو مشتق	
• قسمي کسرونه	
• د اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه	
• د لوګاریتمي تابع ګانو انتیګرال	
• د قسمي کسرونو په مرسته د انتیګرال محاسبه	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	
شپږم څپرکی د انتیګرال تطبیقات	۱۹۹-۲۲۲
• د یوه منحني په واسطه د محصور شوې سطحې د مساحت محاسبه	
• د دوو منحنی ګانو ترمنځ د محصور شوې سطحې د مساحت محاسبه	
• د ګراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم	
• د قوس د اوږدوالی محاسبه	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	
اووم څپرکی احصائیه	۲۲۳-۲۶۰
• د احتمال د تابع توزیع	
• د دوه جملهیي توزیع او د برنولي آزمایښت	
• د پواسن د احتمال توزیع	
• نورمال توزیع	
• د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې ستنډرډ کول	
• نمونه اخېستل	
• د نمونې د اوسط توزیع	
• د مرکزي لېمیټ قضیه	
• د نمونهیي توزیع نسبت	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	
اتم څپرکی احتمالات	۲۶۱-۲۸۲
• پرېکړې او نښتې فضاګانې	
• هم چانسه پیښې	
• د نښتو یا پیوسته فضاګانو احتمال	
• مشروط احتمال	
• د حاصل ضرب اصل	
• د ناڅاپي پېښو استقلالیت	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	

لومړی څپرکی

لېمیټ

د لیمیټ مفهوم



په یوه مستوي کې درې دایرې داسې رسم کړئ چې د O ټکي د دایرو متحد مرکز او شعاع ګانې یې په ترتیب سره $r, \frac{r}{2}$ او $\frac{r}{4}$ وي، دې عملیې ته څو ځلې دوام ورکولای شئ؟

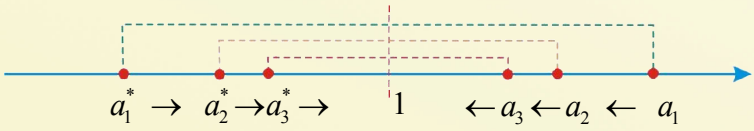
د $a_n = (1+\frac{1}{n})$ او $a_n^* = (1-\frac{1}{n})$ ترادفونه د $n \in IN$ لپاره په پام کې ونیسئ او لاندې فعالیت ترسره کړئ:

- د عددونو په محور باندې د a_1 او a_1^* موقعیت(ځای) وښیئ.
- ویلای شئ چې د a_2 او a_2^* قیمتونه د $[a_1^*, a_1]$ د فاصلې دننه یا د باندې پراته دي.
- د a_1، a_1^* او a_2، a_2^* منځنی ټکي یو له بل سره پرتله کړئ.
- پورته پړاوونو ته په پاملرنې سره ویلای شئ چې د a_3 او a_3^* د ټکو موقعیت د عددونو پر محور په کوم ځای کې واقع دي.
- آیا ویلای شئ چې د n د تر ټولو لویو قیمتونو په اخیستلو سره د a_n او a_n^* ردیفونه کومو قیمتونو ته نژدې کېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله:لیدل کېږي چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نژدې کېږي، یعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ ام حد که n بې نهایت ته نژدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



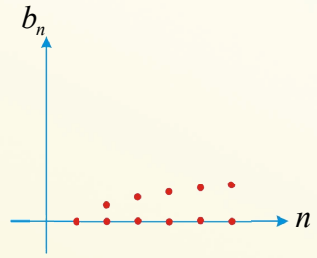
ددې لپاره چې د لیمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړی پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

مثال: لاندې ورکړل شوي ردیفونه د n د تر ټولو لویو قیمتونو لپاره کوم قیمت ته تقرب کوي یا نژدې کېږي، موضوع په ګرافیکي ډول تشریح کړئ، په داسې حال کې چې:

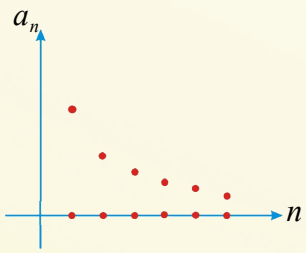
$$a_n = \left(\frac{2n+3}{n}\right) \ldots (i) \qquad b_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) \ldots (ii) \qquad c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \ldots (iii)$$

حل: پوهېږو چې د n د بېلابېلو قیمتونو لپاره ګرافیکي ښودنه په لاندې ډول ده.

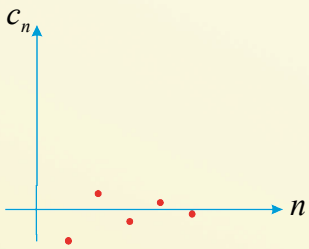
n	1	2	3	4	5	$\to \infty$
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\to 1$



n	1	2	3	4	5	$\to \infty$
a_n	5	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{17}{7}$	$\to 2$



n	1	2	3	4	5	$\to \infty$
c_n	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$\to 0$

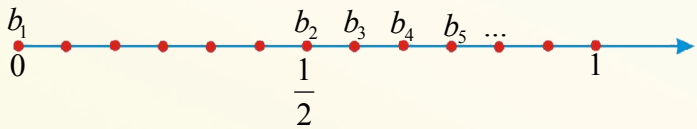


له پورتینو ګرافونو څخه لیدل کېږي چې راکړل شوي ترادفونه د n د قیمتونو په زیاتېدو سره د ترادفونو قیمت یوه ټاکلې عدد ته نژدې کېږي، لکه: د a_n ترادف د 2 عدد ته د b_n ترادف د 1 عدد ته او د c_n ترادف صفر ته تقرب کوي چې n ته د ډېرو لویو قیمتونو په ورکولو سره موضوع په آسانی سره روښانه کېږي.

د ترادف د قیمتونو له جدول څخه د لېمیټ قیمت څرګندېږي، د لېمیټ په شته والی کې ردیف یوه ټاکلې عدد ته نژدې کېږي. دغه ټاکلي عدد ته لېمیټ (limit) وایي. چې په lim سره ښودل کېږي.

ددې لپاره د $b_n = \frac{n-1}{n}$ ترادف په پام کې نیسو، لرو چې:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	...



او یا که چېرې I ..... $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$, II ..... $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}$ او

(III) ..... $2, 4, 6, \ldots, 2n$ د عددونو ترادفونه په پام کې ونیسو، لیدل کېږي چې که n د بې نهایت لورې ته نژدې شي، نو د I ترادف صفر ته نژدې کېږي د II ترادف د (1) عدد ته نژدې کېږي د III ترادف بې‌نهایت (∞) ته نژدې کېږي.

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختیاري ډول د a عدد ته نژدې کېږي، یعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد ($\delta > 0$) څخه کوچنی وي یا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{یا} \quad x \to a \quad \text{یا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چېرې د x د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x: \ a+0.1, \ a+0.01 \ , \ a+0.001 \ , \ a+0.0001 \ , \ldots \to a^+$$

له کېڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چېرې د x د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x: \ a-0.1, \ a-0.01 \ , \ a-0.001 \ , \ a-0.0001 \ , \ldots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري، یعنې:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+ \ , \ x \to a^-)$$

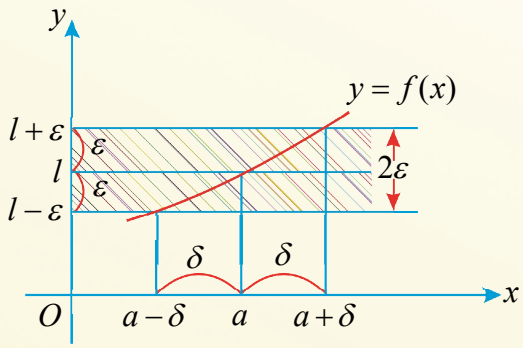
لومړی بېلګه: د x متحول د 9 عدد ته نژدې کړئ یا په بل عبارت د $x \to 9$ مفهوم توضیح کړئ.

حل:

$$x: 9.1 \ , \ 9.01 \ , \ 9.001 \ , \ 9.0001 \ , \ \ldots \ \to 9^{+}$$
$$x: 8.9 \ , \ 8.99 \ , \ 8.999 \ , \ 8.9999 \ , \ \ldots \ \to 9^{-}$$

تعریف: که چېرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغه کې ګډون لري کېدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د x متحول د a عدد ته نژدې، شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نژدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ تابع لیمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړیؤ، نو داسې یې لیکو:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = l \ \Leftrightarrow \ (|x - a| \to 0 \Rightarrow |f(x) - l| \to 0)$$

پوښتنه

د $f(x) = 2x$ تابع په ګرافیکي ډول وښیئ چې که x د (3) عدد ته نژدې شي $f(x)$ د (6) عددته نژدې کېږي.

د ښي او کيڼ خوا لېميټونه

مخـــامخ تـــصوير تـــه پاملرنـــه وکـــړئ ووايـــئ چـــې مخامخ ونې ته له کومو خواوو څخه نژدې کېدای شو.

په لاندې جدول کې د $x \neq 1$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ته ځينې قيمتونه ورکړل شوی.

x	0.98	0.99	0.999	?	1.001	1.01	1.02
$f(x)$	1.98	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow \qquad \longleftarrow$

- د تابع گراف رسم کړئ.
- که x د (1) عدد ته نژدې شي، نو $f(x)$ کوم عدد ته نژدې کېږي.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله ليکلای شو:

د ښي خوا لېميټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د ښي لوري l_1 لېميټ لري که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره يو کوچنی عدد د $\delta > 0$ موجود وي داسې چې که: $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon)$ يا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l_1$$

د کيڼ خوا لېميټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د کيڼ لوري l_2 لېميټ لري. که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره د $\delta > 0$ يو عدد پيدا شي داسې چې $x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) \in (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)$ يا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l_2$$

د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $x \to a$ ته نژدې شي د l لېميټ لري، يعنې: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ په دې شرط چې:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

دویمه بېلګه: و ښیئ چې $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

حل: د ښي او کینې خوا لېمیټونه تر څېړنې لاندې نیسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

لیدل کېږي چې د ښي خوا او کینې خوا لېمیټونه سره مساوي دي، نو $\lim_{x\to 3}=\frac{x^2-9}{x-3}=6$ دی.

دویمه طریقه: د لېمیټ د تعریف په پام کې نیولو سره فرضوو چې د هر اختیاري کوچني عدد ε لپاره یو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 : \ |x-a|<\delta \ \Rightarrow \ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta \ \Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

له پورتنۍ اړیکې څخه دا معلومېږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لېمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لېمیټ لري، یعنې: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

پوښتنه

وښیئ چې د $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$ تابع کله چې $x\to 2$ لېمیټ نه لري.

د لېمیټ خاصیتونه(Properties of Limit)

د مخـامخ مـساوات دلېمیټونـو دواړه خـواوې کلـه چـې $x \to -1$ وکړي، سره مساوي دي او که نه؟

$$\lim_{x\to -1}(x^2 \pm x) = \lim_{x\to -1} x^2 \pm \lim_{x\to -1} x$$

ددې فعالیت د سرته رسولو لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه پیدا کړئ:

- که x د 2 عدد ته نژدې شي، نو د $f(x) = x + 2$ تابع لېمیټ به څو وي؟
- که $x \to 3$ ته تقرب وکړي، نو د $g(x) = 2x$ تابع لېمیټ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \pm \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \div \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لیکلای شو:

که $\lim_{x\to a} f(x) = A$ او $\lim_{x\to a} g(x) = B$ وي، نو:

1) $\lim_{x\to a} Kf(x) = K \lim_{x\to a} f(x) = KA$

2) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$

3) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

4) $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$

5) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \geq 0$

له پورتنیو خواصو څخه درې خاصیتونه ثبوتوو او پاتې یې د زده‌کوونکو کورنۍ دنده ده.

بې نهایت کوچنۍ تابع ګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نژدې شي، بې نهایت کوچنۍ بللې کېږي، که چېرې $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

1- ددې لپاره چې $\lim_{x\to a} f(x)=b$ سره شي، لازم او کافي ده چې د $f(x)$ تابع د یوه ثابت عـدد b او یـوې بـې نهایت کوچني تابع $\varepsilon(x)$ کله چې $x\to a$ د مجموعې په شکل وښودل شي، یعنې:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b+\varepsilon(x) \\ \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=b$$

2- که چېرې $\varepsilon(x)$ ، $x\to a$ ته نژدې شي، بې نهایت کوچنۍ تابع وي، خو صفر نه وي، نو $\lim_{x\to a}\frac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$

د بې نهایت کوچنۍ تابع ګانو مجموعه بیا هم یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

3- د بې نهایت کوچنیو تابع ګانو د ضرب حاصل بیا هم یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

4- که چېرې $\varepsilon(x)$ یوه بې نهایت کوچنۍ تـابع او $u(x)$ داسې یـوه تـابع وي چې لېمیـټ یې صـفر نـه وي، نـو د $v(x)=\frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ تابع یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

مثال:

I) د $\varepsilon(x)=x^2-9$ تابع کله چې $x\to 3$ ، یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده ځکه چې:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=0$$

II) $\varepsilon(x)=\frac{1}{2x}$ تابع کله چې $x\to\infty$ ته نژدې شي بې نهایت کوچنۍ تابع ده:

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

پوښتنې: د تېرو خاصیتونو په مرسته لاندې سوالونه حل کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 2}(2x^2-1)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}1=2\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}1=2\cdot 2^2-1=7$$

$$2)\ \lim_{x\to -3}(x-1)^2=\lim_{x\to -3}(x-1)\cdot\lim_{x\to -3}(x-1)=(-4)(-4)=16$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}4x-\lim_{x\to 0}3}{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

د پورتنیو پوښتنو له حل څخه د لېمیټ یو خاصیت داسې بیان او ثبووو:

1. د څو تابع ګانو د مجموعې لېمیټ د نوموړو هـرې تـابع د لېمیټونـو لـه مجمـوعې سـره مـساوي دي، یعنـې: کـه چېرې د $f(x_1), f(x_2)$ تابع ګانې وي، نو لرو چې:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$$

ثبوت:که $\lim_{x\to a}f(x_2)=b_2$, $\lim_{x\to a}f(x_1)=b_1$ او ε_1 او ε_2 بې نهایت کوچنۍ تابع ګانې وي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1 \ \ .....\ I \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2 \ \ .....\ II \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1)\pm f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)\pm(b_2+\varepsilon_2)=b_1\pm b_2+(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2)$$

څرنګه چې $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$ د بې نهایت کوچنیو تابع ګانو مجموعه او تفاضل ده او د بې نهایت کوچنیو تابع ګانو مجموعه او تفاضل بیاهم یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\pm\lim_{x\to a}f(x_2)$$

2. د دوو یا څو تابع ګانو د ضرب د حاصل لیمیټ د نوموړو تابع ګانو د لیمیټونو د ضرب له حاصل سره مساوي دی:

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)=b_1\cdot b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1 \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2 \end{array}\right\}\Rightarrow f(x_1)\cdot f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=b_1\cdot b_2+b_1\cdot\varepsilon_2+b_2\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

څرنګه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچني عددونه دي، نو د ضرب حاصل یې د b_1 او b_2 سره او همداشان په خپلو کې بې‌نهایت کوچنی کېږي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=b_1\cdot b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)$$

3. د دوو تابع ګانو د نسبت لیمیټ د هغو تابع ګانو د لیمیټونو له نسبت څخه عبارت دی، لکه په لاندې ډول:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}\quad,\quad g(x)=b_2\neq 0$$

ثبوت:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b_1+\varepsilon_1 \\ g(x)=b_2+\varepsilon_2 \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ تفریق کوو:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2b_1+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_1)}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}\quad\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

څرنګه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچني مثبت عددونه($0<\varepsilon<1$)دي، نو کله چې $x \to a$ وکړي صفر کېږي او په پایله کې په لاس راځي چې:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

د سانډویچ قضیه: که چېرې د $f(x), g(x)$ او $h(x)$ تابع ګانې د هر x لپاره په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x)\le g(x)\le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to a} f(x)=b=\lim_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a} g(x)=b$ دی.

مثال: که د $u(x)$ تابع دغه خاصیت($1-\frac{x^2}{4}\le u(x)\le 1+\frac{x^2}{2}$) ولري، نو $\lim_{x\to a} u(x)$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې $\lim_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4})=1=\lim_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{2})$ دی، نو د سانډویچ د قضیې په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\lim_{x\to 0} u(x)=1$$

قضیه: که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ داسې تابع ګانې وي چې $f(x)\le g(x)$ نو د لېمیټ د شتون په صورت کې یې لمبیټ $\lim_{x\to a} f(x)\le \lim_{x\to a} g(x)$ سره دی.

مثال: د $f(x)=\frac{15x-4}{5x+6}$ او $g(x)=\frac{15x+4}{5x-6}$ تابع ګانې په پام کې نیسو په واضح ډول معلومېږي چې د $x>1$ لپاره لرو $f(x)<g(x)$ دی.

حل:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6}=\frac{15}{5}=3$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6}=\frac{15}{5}=3$$

پوښتنې

لاندې لېمیټونه د امکان په صورت کې پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 0} 6x^3-2x^2+5x+3$

2) $\lim_{x\to -1} x^7-2x-5$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+7x}{(2x-5)^2-9}$

5) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}$

6) $\lim_{x\to 1}\frac{2x}{x^2-4x+1}$

د نسبتي تابع ګانو لېمیټونه

آیا پوهیږئ چې مخامخ اړیکې په څه نامه یادیږي؟

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

فعالیت

- د $y = x^2 - 1$ تابع لېمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to -2$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ تابع لېمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to 1$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ تابع لېمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to \infty$ ته تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله

- د ځینو تابع ګانو لېمیټ مستقیماً د قیمت په وضع کولو سره لاسته راځي.
- ځنې تابع ګانې د $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ ... مبهم شکلونه لري چې د ابهام د له منځه وړلو څخه وروسته د تابع لېمیټ لاسته راځي چې په لاندې ډول یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل:

فعالیت

- د $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ تابع قیمت د $x = -1$ په نقطه کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع لېمیټ کله چې $x \to 1$ وي د ابهام کومه بڼه لري.
- آیا د $f(x)$ تابع په داسې ډول ساده کولای شو چې د $x = 1$ لپاره یو معین قیمت ولري؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چېرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ په شکل مبهمه بڼه ولري، د لېمیټ د پیدا کولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو د ابهام عامل(خبیثه فکتور) له منځه وړو او بیا یې د لېمیټ قیمت په لاس راوړو.

مثال: لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\quad ,\quad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\quad ,\quad 3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو:

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$

څرنګه چې پاسنې لیمیټونه د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د تجزیې په مرسته یې وروسته له ساده کولو څخه د لیمیټ قیمت په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-12+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$

حل: بیا هم لیمیټ د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل لري:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

$$3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{0}{0}$$

حل: لیدل کېږي چې نوموړی لیمیټ بیا هم د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د لیمیټ د لاسته راوړلو لپاره د کسر صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{8}$$

پوښتنې

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=?\qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=?\qquad 3)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=?$$

$$4)\ \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}=?\qquad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}=?$$

II- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل

آیا د مخامخ تابع لېمیټ ټاکلی شئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+8}{2x^2-2}$$

- د $f(x)=2x^4+x^3-4x-1$ تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وڅېړئ.
- د $g(x)=x^3-2x-4$ تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وڅېړئ.
- د $y=\frac{5}{x-2}$ تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وڅېړئ.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع لېمیټ هغه وخت په لاس راوړئ چې $x\to 0$ وکړي.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع لېمیټ هغه وخت په لاس راوړئ چې $x\to\infty$ وکړي.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: هغه توابع چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري د لېمیټ د پیدا کولو لپاره یې داسې کړنه کوو:

د تابع صورت او مخرج په هغه متحول چې تر ټولو لوی توان ولري وېشو، وروسته له ساده کولو څخه یې لېمیټ په لاس راځي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}$ پیدا کړئ.

حل: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

څرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج په x^2 باندې وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

دویم مثال: د $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}$ پیدا کړئ.

حل:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

څرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

دریم مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

حل:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

څرنګه چې پوښتنه $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

یادونه: هغه تابع ګانې چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري، پرته له دې چې عملیه پرې سرته ورسوو کولای شو، په لاندې ډول د هغوی لېمیټ په لاس راوړو:

د $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}$ تابع په پام کې ونیسئ که چېرې ($x\to\infty$) کړی وي، نو دلته درې حالتونه ممکن دي:

1- د $m=n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت دی له $\dfrac{a_0}{b_0}$.

2- د $m<n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت له صفر څخه دی.

3- د $m>n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت له $\pm\infty$ څخه دی.

څلورم مثال: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2}{x+1}$

حل:

1- څرنګه چې $m=n$ دی، نو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{-x^4}=-6$$

2- څرنګه چې $m<n$ دی، نو د نوموړی تابع لیمیټ صفر دی.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}=0$$

3- څرنګه چې $m>n$ دی، نو د نوموړي تابع لیمیټ مساوي له ∞ سره دی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\infty$$

یادونه: زده‌کوونکي دې ورکړل شوي ځوابونه په کور کې د عملیې د سرته رسولو څخه وروسته په لاس راوړي.

پوښتنې

لاندې لیمیټونه پیدا کړئ؟

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x^2-x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x+5}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2}{x+1}$

III- د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه

د مخامخ لیمیټونو قیمتونه پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}-\frac{x-1}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)\cdot\frac{2x^3-4}{x-3}$$

- د $a+1$ مزدوج ولیکئ.
- د $\sqrt{x}-1$ مزدوج ولیکئ.
- د $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$ لیمیټ پیدا کړئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د $f(x)=(2x-1)(x+1)$ تابع لیمیټ وټاکئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

د هغو تابع ګانو چې د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه ولري، د لیمیټ د پیدا کولو لپاره یې د کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو او هغه داسې ساده کوو، تر څو چې د $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي، وروسته یې لیمیټ په لاس راوړو.

مثال: لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=?$ 2) $\lim_{x\to 1}(x-1)\left(\frac{1}{x^2+2x-3}\right)=?$

حل 1:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=\frac{9}{1-1}-\frac{8\cdot 1+10}{1^2-1}=\frac{9}{0}-\frac{18}{0}=\infty-\infty$$

څرنګه چې نوموړی لیمیټ د $(\infty-\infty)$ بڼه لري، نو لیکلای شو چې:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{9x+9-8x-10}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=?$

حل2:

$$\lim_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=(1-1)(\frac{1}{1^2+2-3})=0\cdot\frac{1}{3-3}=0\cdot\frac{1}{0}=0\cdot\infty$$

لیدل کېږي چې نوموړی لېمیټ د $(0\cdot\infty)$ مبهم شکل لري، نو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4}$$

پوښتنې

لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^5-8x^3)$

4) $\lim\limits_{x\to 5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

د $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ مبهم شکلونه

د مخامخ لیمیټ مبهم شکل وټاکئ؟

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$

فعالیت

- د $y = x^{x}$ تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x \to 0$ وکړي.
- د $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ لیمیټ بنه په هغه صورت کې وټاکئ چې $x \to \infty$ وکړي.
- د کومې عملیې په مرسته کولای شو چې د $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ مبهم شکلونو ابهام له منځه ویسو؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چېرې یوه تابع پورتني مبهم شکلونه ځانته غوره کړي، هغه د طبیعي لوګاریتم په مرسته د $0\cdot\infty$ شکل ته د اړولو وړ دي، یعنې:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}(\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$$

یادونه:

I- که چېرې $n \to \infty$ وکړي د $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n}$ ترادف $e = 2.71828182$ عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n} = e$$

چې په لاندې جدول کې ښکارېږي:

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$(1+\frac{1}{n})^{n}$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1000	0.001	1.001	2.716923932
10000	0.0001	1.0001	2.718145926
100000	0.00001	1.00001	2.718268237
1000000	0.000001	1.000001	2.718280469
1000000000	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718281828

نو $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$ دی چې ... $e = 2.71$ عدد ته د Euler عدد وايي.

II- لاندې ليميتونه پيدا کړئ:

1) $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

ثبوت: پوهېږو چې څلور واړه پوښتنې د 1^∞ مبهم شکلونه لري.

1) $x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}\ ,\ \alpha \to 0 \Rightarrow x \to \infty \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u}\ ,\ x \to \infty \Rightarrow u \to 0$$

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}} = \lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}$$

$$x = \frac{1}{u} \to u = \frac{1}{x}\ ,\ u \to 0 \Rightarrow x \to \infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\ ,\ x = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x}\ ,\ x \to 0 \Rightarrow u \to \infty$$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\right] = \ln e = 1$$

$$4)\ y=e^x-1 \quad \Rightarrow e^x=1+y \quad \Rightarrow x=\ln(1+y)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}\ ,\ y=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{y}\ ,\ y\to 0\Rightarrow x\to\infty$$

$$=\frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x}=\frac{1}{\ln e}=\frac{1}{1}=1$$

د 1^∞ مبهم شکل عمومي حالت: که چېرې د اکسپوننشیل تابع لېمیټ یعنې $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ د 1^∞ مبهم شکل خانته غوره کړي په دې حالت کې $\alpha=u-1$ سره تعویضوو، په نتیجه کې:

$$\lim_{x\to a}u^v=\lim_{x\to a}[(1+u-1)]^{\frac{v}{u-1}u-1}=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\alpha}\right]=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

څرنګه چې $\alpha=u-1$ دی که چېرې $u\to 1$ نو $\alpha\to 0$ **ته نژدې کېږي په پایله کې :**

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}=e^P$$

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=e^P\quad ,\quad P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

لومړی مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ لېمیټ قیمت په لاس راوړئ.

حل: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو معلومېږي چې لېمیټ د 1^∞ مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$u=1+\frac{2}{x}\quad ,\quad v=x$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=e^P\quad ,\quad P=\lim_{x\to\infty}\left[x(1+\frac{2}{x}-1)\right]=2$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=e^P=e^2$$

دویم مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$ **قیمت محاسبه کړئ.**

حل: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=1^\infty$

څرنګه چې معلومېږي نوموړی لېمیټ د 1^{∞} مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^{P}$$

$$u=1+\frac{1}{x}\quad,\quad v=\frac{x-5}{2}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(1+\frac{1}{x}-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^{P}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

دریم مثال: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل: **د تېر په شان بیاهم لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو،** $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}$

څرنګه چې معلومېږي لېمیټ د 1^{∞} مبهم شکل لري د فورمول په مرسته یې محاسبه کوو:

$$u=\cos x\quad,\quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{P}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(\cos x-1)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$\frac{\cos^2 x+\cos x-\cos x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x}{x(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\cdot\frac{0}{2}=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{P}=e^{0}=1$$

پوښتنې

لاندې لېمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$

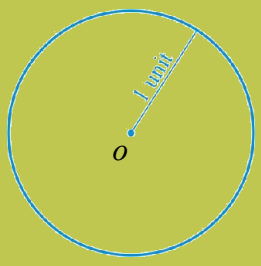
3) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}$

4) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$

5) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

د مثلثاتي تابع ګانو لېميټ

Trigonometric functions limits



که د یوې دایرې شعاع یو واحد (1unit) وي، نوموړې دایرې ته څه ډول دایره وایي.

- دوضعیه کمیاتو په سیستم کې د $C(o,r)$ په مثلثاتي دایره کې د θ مرکزي زاویه رسم کړئ.
- د C له بهرني ټکي څخه په دایره باندې د ox پر محور د $\overline{CA}$ مماس او $\overline{MB}$ عمود رسم کړئ.
- د C ټکی د دایرې له مرکز سره وصل کړئ.
- د مرکزي زاویې د مقابل قوس د اندازه کولو واحد په ګوته کړئ.

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیان او ثبوتوو:

قضیه: د یوې زاویې د ساین او د هغې زاویې د نسبت لېميټ مساوي په (1) دي، کله چې زاویه صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

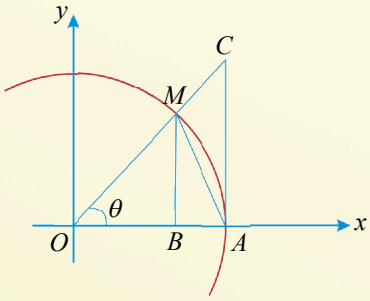
ثبوت: په لاندې شکل کې د MOA او COA د مثلثونو او OMA د قطاع مساحتونه په لاس راوړو:

د MOA مثلث مساحت $=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{BM}=\frac{\overline{BM}}{2}\cdot r$

د $\overset{\frown}{OAM}$ قطاع مساحت $=\frac{1}{2}\theta r^2$

د θ د زاویې پراخوالی باید په رادیان لاسته راوړو.

د $\overset{\Delta}{COA}$ مساحت $=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{AC}=\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$



د MOA او COA مثلثونو مساحتونه د OMA د قطاع له مساحت سره پرتله کوو:

$$\frac{1}{2}r\,\overline{BM}<\frac{1}{2}\theta r^2<\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$

د نامساواتو دواړه خواوې په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو:

$$\frac{\overline{BM}}{r} < \theta < \frac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \sin\theta < \theta < \tan\theta \Rightarrow 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0}\cos\theta \le \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to 0}1$$

د سانډوېچ د قضيې پر بنسټ معلومېږي چې $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ او همدارنګه $\lim_{\theta\to 0}1 = 1$ دی، نو $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ دی.

پوهېږو چې د هرې زاوېې ساين د (1) او (-1) د عددونو تر منځ تحول کوي:

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

$$-\frac{1}{\theta} \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le \frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}$$

د سانډوېچ د قضيې پر اساس لیکلای شو چې:

$$\left.\begin{array}{l} -\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \\ \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} = 0$$

په پایله کې ویلای شو چې د یوې زاوېې ساین او د هغې زاوېې د نسبت لیمیټ مساوي په صفر دی هغه وخت چې زاویه بې‌نهایت ته نژدې شي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

حل: که $2x = \alpha$ نو $x = \frac{\alpha}{2}$ کېږي، څرنګه چې $x \to 0$ کړی دی، نو $\alpha \to 0$ کوي، نو لیکلای شو:

$$\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 2\cdot 1 = 2$$

دویم مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}$ حل کړئ.

حل:

$$\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}=\frac{5\cdot 2x\frac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10\frac{\sin 2x}{2x}}{7\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{10}{7}\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

دریم مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ حل کړئ.

حل: پوهېږو چې $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ سره دی، نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

څلورم مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$ پیدا کړئ:

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x\frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3x}{5x}\frac{\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to 0}\cos 3x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\frac{\frac{1}{1}}{1}=\frac{3}{5}$$

پنځم مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$ په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}$$

که $5x = y$ سره وي، او $x \to 0$ نو $y \to 0$ کوي، نو:

$$= 10 \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x + \frac{\pi}{6})}{x + \frac{\pi}{6}}$

2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x}$

3) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$

4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x}$

5) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$

6) $\lim_{x \to 0} \sin 5x \cos 3x$

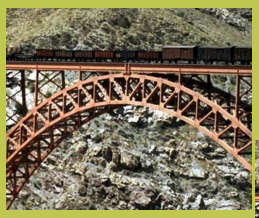
7) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan(2x - 1)}{4x^2 - 1}$

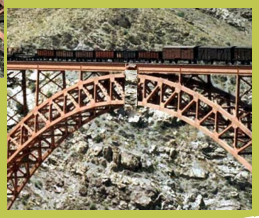
8) $\lim_{x \to 0} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$

9) $\lim_{x \to 1} (\cos^2 x + \sin^2 x)$

د تابع ګانو متمادیت

Continuity of functions





شکلونو ته پام وکړئ.

لومړی او دویم پلونه یو له بل څخه څه توپیر لري، خپل نظر بیان کړئ.

د تابع ګانو ګرافونه مختلف شکلونه لري چې ځینې یې په یوه قلم پرته له دې چې د قلم څوکه له کاغذ څخه پورته شي رسمېږي، متصلې یا متمادي تابع ګانې بلل کېږي او ځینې یې په یوه قلم نه شي رسمېدلای یعنې د رسم په وخت کې باید د قلم څوکه یو ځل یا څو ځلې د کاغذ څخه پورته شي، ځکه په یوه برخه کې یې ګراف غوڅ وي، دغه ډول تابع ګانې په نوموړی ټکې کې غیر متصلې یا غیر متمادي تابع ګانې بلل کېږي.

- د $f(x) = x^2 + 4x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)$ د تابع لېمیټ د $x = 1$ په نقطه کې پیدا کړئ.
- د $f(x)$ د تابع قیمت د $x = 1$ په نقطه کې پیدا او وروسته دواړه اړیکې سره پرتله کړئ.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د $y = f(x)$ تابع د $x = a$ په ټکي کې متمادي بلله کېږي چې لاندې شرطونه په کې صدق وکړي.

1- د $f(x)$ تابع د a په ټکې کې تعریف شوي وي.

2- راکړل شوي تابع د a په ټکې کې لېمیټ ولري.

3- د $f(a)$ قیمت باید د $f(x)$ له لېمیټ سره مساوي وي: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

لومړی مثال: وښیئ چې د $f(x)=x^2+2x-1$ تابع د $x_0=2$ په ټکي کې متمادي ده.

حل: څرنګه چې د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، نو د متمادیت له شرطونو څخه لیکلای شو:

1) $2 \in Dom\ f(x)=IR$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)=4+4-1=7 \\ 3)\ f(2)=2^2+4-1=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=7$$

څرنګه چې د متمادیت درې واړه شرطونه په کې حقیقت لري، بناءً تابع متمادي ده.

دویم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ د تابع متمادیت د $x_0=-1$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع د تعریف ساحه عبارت ده، له: $IR\setminus\{-1\}$

او $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{-3}{0}=\infty$ سره دی.

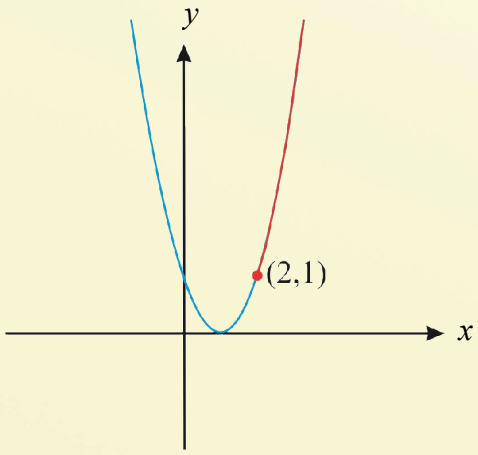
څرنګه چې لیدل کېږي -1 د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی، بناءً نوموړی تابع د -1 په ټکي کې متمادي نه ده.

دریم مثال: د $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & ;\ x<2 \\ x^2-3 & ;\ x\geq 2 \end{cases}$ د تابع متمادیت د $x=2$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د ښي او کیڼي خوا لیمیټونه څېړو:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-3)=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x+1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x) \quad \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

په پایله کې ویلای شو چې تابع په نوموړي ټکي کې متمادي ده، لکه چې په شکل کې لیدل کېږي.



څلورم مثال: که $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; x\geq 1\\ 1-x & ; x<1\end{cases}$ وي، نو د $x=1$ په ټکي کې د تابع متمادیت وڅېړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1-x=0\\ f(1)=0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+1=3\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$$

نو تابع په $x=1$ کې غیر متمادي ده.

پایله: که چېرې د $g(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې $f(x)$ په $x=g(a)$ کې متمادي وي، نو $f(g(x))$ په $x=a$ کې هم متمادي ده، یعنې:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(g(a))$$

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\alpha}=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\alpha} \qquad , \qquad \alpha\in IR$

2) $\lim\limits_{x\to a} a^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

3) $\lim\limits_{x\to a}\log_a f(x)=\log_a(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

4) $\lim\limits_{x\to a}\sin f(x)=\sin(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

پنځم مثال: که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ وي او $x\neq -3$ وي.

آیا د $f(x)$ تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي ده؟

حل: څرنګه چې تابع د $x=-3$ په نقطه کې نه ده تعریف شوې یا په بل عبارت د -3 عدد د تابع د تعریف په ساحه کې نه دی شامل، نوله دې امله تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي نه ده.

غیر متمادیت: که چېرې د $f(x)$ تابع په $x=a$ کې یو له لاندې درې شرطونو څخه و نه لري وایو چې f په a کې غیر متمادي ده او a یې د انفصال ټکی دی. انفصال په درې ډوله دی.

لومړی ډول: د f تابع د a په ټکي کې د ښي او کیڼ لوري لېمیټونه ولري، خو مساوي نه وي.

دویم ډول: کم تر کمه یو له دوو لېمیټونو(د ښي او کیڼ لوري لېمیټونه) څخه موجود نه وي.

دریم ډول: که چېرې تابع د a په ټکي کې لېمیټ ولري، خو a د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي.(یوازې یو خالي ټکی وي.)

پوښتنې

په ورکړ شویو ټکو کې د تابع متمادیت وڅېړئ.

$a)\ f(x)=x^2+5(x-2)^7 \quad ; \quad x=3$

$b)\ f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x=-1$

$c)\ h(x)=\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x=-2$

$d)\ f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x=3$

$e)\ f(x)=|x-3| \quad ; \quad x=3$

$f)\ g(x)=\dfrac{|x|}{x} \quad ; \quad x=0$

$g)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ 3 & ; \quad x=2 \end{cases}$

$h)\ f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3} \quad ; \quad x=2$

د متمادي تابع گانو خاصیتونه

د مخامخ مساواتو په اړه سوچ وکړئ چې حقیقت لري او که نه؟

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad , \; g(x) \neq 0$$

فعالیت

- که $f(x) = x^2 - 1$ وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
- که $g(x) = x + 3$ وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
- د $f(x) + g(x)$ د تابع گانو متمادیت وڅېړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

پایله: که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع گانې د $x = c$ په ټکي کې متمادي وي، نو له لاندې تابع گانو څخه یې هره یوه په $x = c$ یا یوه انټروال کې متمادي ده.

1- د تابع گانو جمع $f(x) + g(x)$

2- د تابع گانو تفریق $f(x) - g(x)$

3- د تابع گانو ضرب $f(x) \cdot g(x)$

4- د تابع گانو تقسیم $\dfrac{f(x)}{g(x)} \; ; \; g(x) \neq 0$

لومړۍ بېلگه: **که** $f(x) = x^2 + 3$ **او** $g(x) = x^2 + 3x - 2$ **وي، نو:**

1- f او g د $x = 1$ په ټکي کې متمادي دي او که نه؟

2- وڅېړئ چې:

الف) $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ وي.

ب) $f(x)\cdot g(x)=(f\cdot g)(x)$ د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده او که غیر متمادي.

حل:لومړی هره یوه تابع بېلابېله څېړو چې متمادي ده که نه؟

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3)=4$

3) $f(1)=(1^2+3)=4$

نو د f **تابع** د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

1) $D\,g(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-2)=1^2+3\cdot 1-2=2$

3) $g(1)=(1^2+3\cdot 1-2)=2$

په همدې شان د g تابع د $x=1$ په ټکي کې هم متمادي ده.

2- اوس د تابع ګانو د جمعې او ضرب د حاصل متمادیت څېړو:

الف)

$f(x)+g(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D(f(x)+g(x))=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+3x+1)=6$

3) $f(1)+g(1)=(1+3+1+3-2)=6$

$\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=f(1)+g(1)=6$

$(f+g)(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D[(f+g)(x)]=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}[(f+g)(x)]=\lim\limits_{x\to 1}[2x^2+3x+1]=6$

3) $(f+g)(1)=(2x^2+3x+1)(1)=6$

$\lim\limits_{x\to 1}[(f+g)(x)]=(f+g)(1)=6$

په پایله کې د متمادي تابع ګانو د جمعې حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي دی.

ب)

$$f(x)\cdot g(x)=(x^2+3)(x^2+3x-2)=x^4+3x^3+x^2+9x-6$$

1) $D(f\cdot g)(x)=IR$

2) $(f\cdot g)_{(1)}=1^4+3\cdot 1^3+1^2+9\cdot 1-6=8$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=8$

$\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(1)=8$

په پایله کې د متمادي تابع گانو د ضرب حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

دویمه بېلگه: که $g(x)=3x-2$ او $f(x)=x+1$ وي، وڅېړئ چې آیا $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په نقطه کې متمادي ده؟

حل:

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$

3) $f(2)=x+1=3$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=3$

1) $Dg(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

3) $g(2)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

$\lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)=4$

$$f(x)\cdot g(x)=(x+1)(3x-2)=3x^2-2x+3x-2=3x^2+x-2$$

$D(f\cdot g)(x)=IR$

$\lim\limits_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=3(4)+2-2=12$

$(f\cdot g)(2)=3(4)+2-2=12$

$\lim\limits_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=(f\cdot g)(2)=12$

په پایله کې لاس ته راځي چې $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په ټکي کې متمادي ده.

پوښتنې

1- وښيئ چې لاندې تابع ګانې په ورکړ شويو نقطو کې متمادي دي او که نه؟

1) $f(x)=x^3-2(x+1)^5 \quad ; \quad x=2$

2) $g(x)=\dfrac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x)} \quad ; \quad x=-1$

3) $h(x)=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x=4$

2- تشريح کړئ چې ولې د $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ تابع په $x=0$ کې غيرمتمادي ده.

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختیاري ډول د a عدد ته نژدې کېږي، یعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچني دی یا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{یا} \quad x \to a \quad \text{یا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چېرې د x د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

له کیڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چېرې د x د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

تعریف: که چېرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې شامل وي کېدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د x متحول د a عدد ته نژدې شي، نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نژدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ د تابع لېمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي، نو داسې یې لیکو:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$$

د لېمیټ ځانګړتیاوې: که f او g دوې تابع ګانې وي، C,L او M حقیقي عددونه وي، داسې چې $\lim_{x \to c} f(x) = L$ او $\lim_{x \to c} g(x) = M$ ، نو لاندې رابطې لیکلای شو:

1) $\lim_{x \to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = L+M$

2) $\lim_{x \to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) = L-M$

3) $\lim_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) = L \cdot M$

4) $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}\ ,\quad M \neq 0\ ,\quad g(x) \neq 0$

5) $\lim_{x \to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to c} f(x)} = \sqrt{L}$

بې نهایت کوچنی تابع ګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نژدې شي، بې نهایت کوچنی بللې کېږي، که چېرې $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ وي.

د ساندویچ قضیه: که چېرې د $g(x), f(x)$ او $h(x)$ تابع ګانې د هر x لپاره په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x) \le g(x) \le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to a} f(x) = b = \lim_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a} g(x) = b$ دی.

- که چېرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ مبهمه بڼه ولري، د لېمیټ د پیدا کولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو او بیا یې لېمیټ په لاس راوړو.
- $f(x)=\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n}$ د تابع د لېمیټ د پیدا کولو لپاره چې $x \to \infty$ وکړي، عبارت دی له:

1. د $m=n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت دی له $\frac{a_0}{b_0}$
2. د $m<n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت له صفر څخه دی.
3. د $m>n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت دی له $\pm\infty$

- د هغو تابع ګانو چې $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ بڼه ولري د لېمیټ د پیدا کولو لپاره یې د کسرونو د جمعې، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو، تر څو د $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي چې وروسته یې لېمیټ په لاس راوړو.
- هغه تابع ګانې چې د 1^∞ مبهم شکلونه لري له دې فورمول څخه $\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} \overset{1^\infty}{=} e^P \quad , \quad P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$ یې د لېمیټ د پیدا کولو لپاره کار اخلو.
- لاندې رابطه کله چې $\theta \to 0$ وکړي همېشه سمه ده.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

- د $y=f(x)$ تابع د $x=a$ په ټکی کې متمادي بلل کېږي، کله چې:

1. a د $f(x)$ د تابع په دومین کې شامل وي.
2. راکړل شوی تابع د a په نقطه کې لېمیټ ولري.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

د لومړي څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښۀ کړي.

-1 $\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}$

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

-2 $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

-3 $\lim_{x\to 1.4}(2x+0.3)$

a) 1 b) 3 c) 0 d) هيڅ يو

-4 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

-5 $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

a) $2+\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

-6 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

-7 لاندې لېميټونه پيدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$

2) $\lim_{x\to -1}\sqrt{3+x}$

3) $\lim_{x\to +\infty}\frac{6}{x^2-7}$

4) $\lim_{x\to \infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

5) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x-18}{x^2+3x-10}$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x-\sqrt{3x-2}}$

8) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cos x}$

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$

12) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{2}{x^2+2x}\right)$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)+\sin(a-x)}{\tan(a+x)+\tan(a-x)}$

14) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+2}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\sin x-\tan x}{x^2\sin x}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x+\sin^2 x}{a\,x^2}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{x^2}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 3x\sin 2x}{x\tan 3x}$

20) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

21) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin 3(\pi+u)}{\sin 8(\pi+u)}$

22) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$

23) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$

24) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x+4}{4x+\sqrt{x}}$

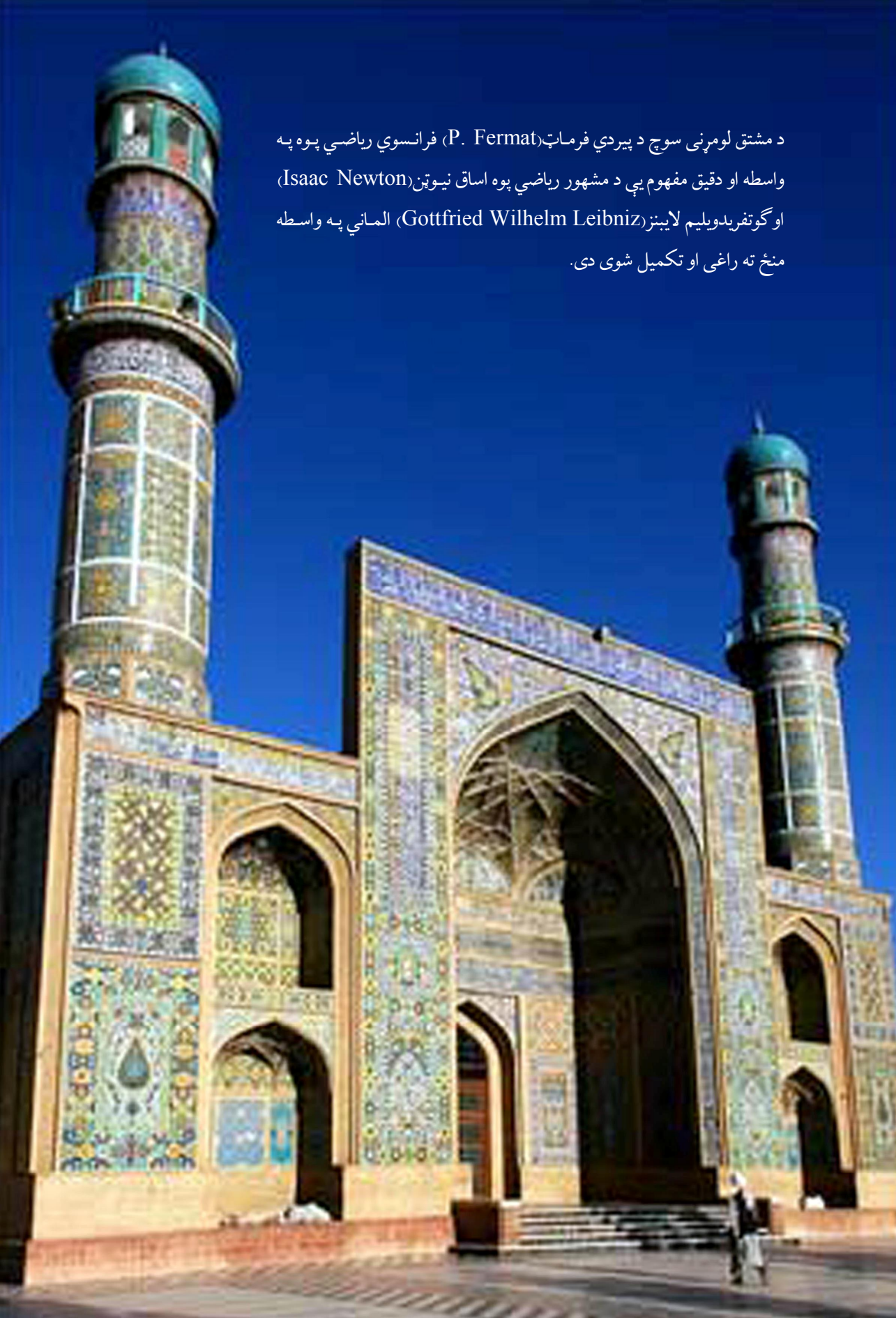
25) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}$

26) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$

دویم څپرکی

مشتق

د مشتق لومړنی سوچ د پیردي فرماټ(P. Fermat) فرانسوي ریاضي پوه په واسطه او دقیق مفهوم یې د مشهور ریاضي پوه اساق نیوټن(Isaac Newton) او گوتفریدویلیم لایبنز(Gottfried Wilhelm Leibniz) المانی په واسطه منځ ته راغی او تکمیل شوی دی.



مشتقات

Derivatives

د $f(x)=x^2-1$ تابع په پام کې ونیسئ د مخامخ کسر لیمیټ پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$$

د یوې منحني میل

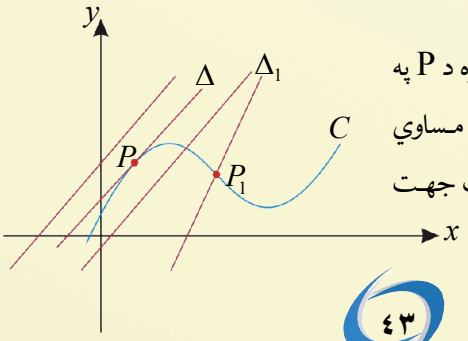
- که د یوه مستقیم خط دوه ټکې $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ معلوم وي، نو د دې مستقیم خط میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي.
- آیا د یوه مستقیم خط میل ثابت او مساوي دي؟ که په یوه ځانګړې ټکي پورې اړه لري؟
- آیا د مستقیم خط میل د هغې زاویې سره اړه لري چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت لورې سره جوړوي؟
- آیا د مستقیم خط او منحني میلیونه یو شان پیدا کېږي؟

له پورتنیو پوښتنو څخه څرګندېږي چې د منحني میل په اساس سره نشو پیدا کولای، ځکه چې منحني خط په هر ټکي کې خپل مسیر ته بدلون ورکوي او په مختلفو ټکو کې بېلابېل میلونه لري، نو له دې کبله لومړی د یوه منحني خط میل د هغه په یوه ټکي کې تعریفوو او بیا یې د محاسبې لپاره یو فورمول په لاس راوړو.

- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د c منحني خط رسم او د P او P_1 دوه ټکي پرې وټاکئ.
- د P_1 په ټکي کې د Δ_1 قاطع او د p په ټکي کې د Δ مماس رسم کړئ.
- که د P_1 ټکی د C په منحني باندې داسې حرکت وکړي چې د p ټکي ته نژدې شي، په پایله کې د Δ_1 مستقیم خط له Δ مستقیم خط سره څه اړیکه پیدا کوي؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

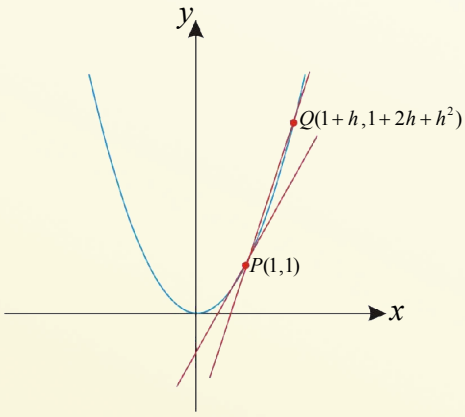
د Δ د مسقتیم خط میل چې د C له منحني سره د P په نقطه کې مماس دی د هغې زاویې له (tan) سره مساوي دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.



لومړی مثال:د $y = f(x) = x^2$ له منحني سره د مماس میل د $P(1,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د منحني میل د مماس له میل سره د P په ټکي کې برابر دي، نو ددې مماس میل له هغه فورمول څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي، نشو پیدا کولای، ځکه دلته یوازې د یوې نقطې مختصات ورکړل شوی دي. ولې کولای شو د دې مماس د میل تخمیني قیمت د هغه قاطع خط له میل څخه چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي، پیدا کړو، په هغه صورت کې چې د Q ټکی د P ټکي ته نژدې شي د PQ د مماس میل 2 ته تقرب کوي چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي.

x	2	1.5	1.1	1.01	1.001
y	4	2.25	1.21	1.0201	1.002001
$m_{\overline{PQ}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	3	2.5	2.1	2.01	2.001



په عمومي ډول هغه لومړی مختصه چې د $P(1,1)$ ټکي ته نژدې ده په $1+h$ ښودلای شو چې h یو کوچنی مثبت یا منفي عدد دی، خو $h \neq 0$ دی نو لیکلای شو:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$$

نو دا $(1+h \ , \ 1+2h+h^2)$ ټکی د منحني پر مخ راکړل شوی پروت دی، نو په پایله کې هغه مستقیم خط چې له $P(1,1)$ او $Q(1+h, 1+2h+h^2)$ له ټکو څخه تیریږي، میل یې عبارت دی له:

$$m_{PQ} \frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

که چېرې په شکل کې $h \to 0$ نو $Q \to P$ کوي، قاطع خط د $P(1,1)$ په نقطه کې مماس کېږي چې د همدې مماس میل ته د تابع مشتق وایي؛ یعنې: $\overline{PQ} = \lim_{h \to 0}(2+h) = 2$

د لېميټ دا عمليه موږ تـه دا امکـان پـه لاس راکـوي چې د $y = x^2$ د تـابع د منحنـي ميـل پـه يـوه اختيـاري ټکـي $P(x, y)$ کې په لاس راوړو. که د Q د ټکـي اختيـاري مختـصات $\left[x+h, (x+h)^2\right]$ وي او د PQ ميـل تـه m او د P په ټکي کې د مماس ميل په m_T سره وښيو لرو چې:

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$m_{T=} \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

نو په عمومي بڼه ليکلای شو، که چېرې $P[x, f(x)]$, $Q[x+h\ , f(x+h)]$ د نوموړي منحني دوې اختياري نقطې وي، نو لاندې خارج قسمت چې د Newton د رابطې په نامه مشهور دی، ليکلای شو:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

په حقيقت کې دا د هغه مستقيم خط ميل دی چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي.

او د منحني ميل د هغې په هر اختياري ټکي کې عبارت دی له:

$$m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

دويم مثال: د $f(x) = x - x^2$ د منحني سره د مماس ميل د $P(2,0)$ په ټکي کې پيدا کړئ.

حل: د Newton خارج قسمت تشکيل او د $x = 2$ په ټکي کې د منحني ميل حسابوو:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h) - (2+h)^2 - 2 + 2^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2 + h - 4 - 4h - h^2 - 2 + 4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h - 4h - h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(1 - 4 - h)}{h} = \lim_{h\to 0}(-3 - h) = -3$$

منځنی يا وسطي تغير

که يو جسم د يوه مستقيم خط پر مخ د حرکت په حال کې وي، طبيعي ده چې وهل شوی فاصله د زمان تابع ده يعنې $S = f(t)$ د t_1 او t_2 دوو وختونو خارج قسمت $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ د جسم د وسطي سرعت په نامه يادېږي او سرعت د t_0 په وخت کې عبارت له هغه حد يا لېميټ څخه دی چې لحظوي سرعت بلل کېږي. $\lim_{t\to t_0}\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

د پورتنی رابطې لیمیټ د t او t_0 په وخت کې داسې لیکو:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

په پایله کې ویلای شو چې د تابع او متحول د زیاتوالي خارج قسمت ته متوسط تغییر وایي، یعنې:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

مثال: د $y=f(x)=x^2$ په تابع کې د f متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انتروال کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_1=2$ او $x_2=5$ دی، نو د تعریف په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{5^2-2^2}{5-2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-4}{5-2}=\frac{21}{3}=7$$

پوښتنې

1) د لاندې تابع ګانو د x د متحول لپاره د Δx او Δy تزاید په پام کې نیولو سره $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او میل یې په غوښتل شوو ټکو کې پیدا کړئ.

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x^2-4$, (0)

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x-x^2$, (3)

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=3x^2-5x+4$, $(2,-1)$

2) د $f(t)=5t^3-3t+1$ د تابع متوسط تغییرات د $[2,4]$ په انتروال کې پیدا کړئ.

د یوې تابع مشتق

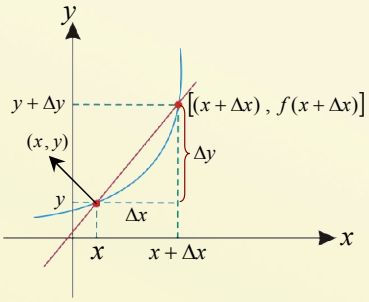
مخامخ لېمیټ څه را ښـیي آیا په بل ډول یې لیکلای شو؟

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

فعالیت

- که چېرې د $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انتروال کې متمادي وي، که د x متحول د Δx په انـدازه زیـاتوالی پیدا کړئ آیا تابع تزاید کوي په دې حالت کې، د متحول او تابع د زیاتوالي رابطه ولیکئ.
- د تابع تزاید د متحول پر تزاید $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ داسې ولیکئ چې په مساوات کې بدلون رانشي.
- که له دواړو خواوو څخه لېمیټ ونیول شي، په هغه صورت کې چې Δx صفر ته تقرب وکړي، د دې حـد یـا لېمیټ د څه په نامه یادېږي؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:



$$y=f(x)$$
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \quad / \div \Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

تعریف: د تابع او مستقل متحول د تزاید د نسبت لېمیټ کله چې د مستقل متحول تزاید صفر ته تقرب وکړي د تابع مشتق بلل کېږي، لکه: $\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او هغه په $f'(x)$ یا y' ، $\frac{df}{dx}$ ، $\frac{dy}{dx}$ سره ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x$ وي، د دې تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د مشتق د تعریف څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو چې:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}\Rightarrow f'(x)=2$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=3x^2+3x(0)+0^2\quad\Rightarrow\ f'(x)=3x^2$$

دریم مثال: د $f(x)=\sqrt{x}\ ,\quad x\geq 0$ مشتق پیدا کړئ.

حل: مخکې له حل څخه $x\geq 0$ حالت په پام کې نیسو:

الف: که $x>0$ وي، نو د مشتق د تعریف په مرسته لیکو:

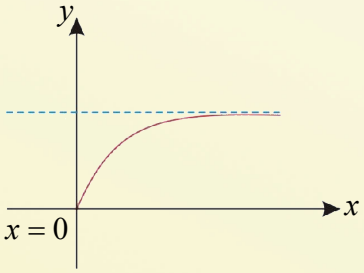
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب: که $x=0$ شي نو $\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ موجود نه دی، نو د $y=\sqrt{x}$ تابع د $x=0$ په ټکي کې د اشتقاق وړ نه ده لکه چې په شکل کې لیدل کېږي، یعنې که x ډېر لوی شي، نو د مماس میل صفر ته نژدې کېږي او د $x=0$ په ټکي کې $(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ د مماس میل ډېر لویېږي چې مماس په یوه عمود خط بدلېږي.



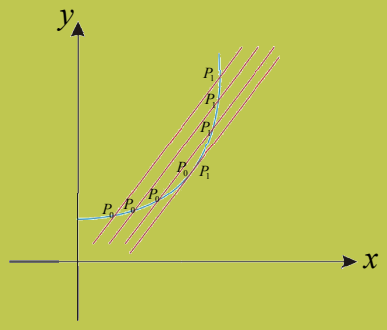
پوښتنې

دلاندې توابعو مشتق د تعریف په مرسته پیدا کړئ.

1) $f(x)=x-x^2$ 2) $f(x)=-2x^2$ 3) $f(x)=2x^2+x$

د مشتق هندسي تعبير

په مخامخ شکل کې څه وینئ د هغه په اړه مناقشه وکړئ.



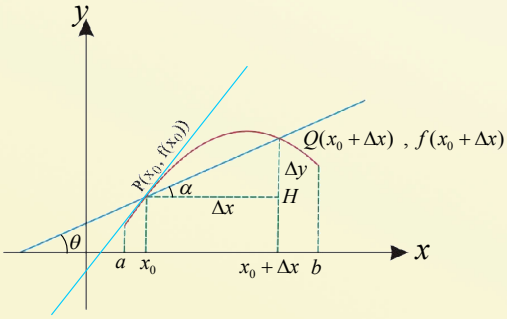
فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د C منحني یا د $f(x)$ تابع داسې چې د $[a,b]$ په انتروال کې متمادي وي گراف یې رسم او د $P(x_0, f(x_0))$ او $Q(x_0+\Delta x\ ,\ f(x_0+\Delta x))$ ټکي د منحني پرمخ وټاکئ.
- د Δ مستقیم خط داسې رسم کړئ چې د منحني د P او Q له ټکو څخه تېر شي.
- آیا ویلای شئ چې د Δ مستقیم خط د x د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي؟
- ووایئ چې د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یا $\frac{HQ}{HP}$ نسبت د څه په نامه یادېږي؟
- که د Q ټکی د P ټکي ته ډېر نژدې شي $(\Delta x \to 0)$، نو د Δ مستقیم خط په څه ډول کرښه بدلېږي په شکل کې یې وښیئ.
- د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ لېمیټ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړي، په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې وڅېړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د $f(x)$ منحني د تابع مشتق، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی، یعنې:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan\alpha = \tan\theta = m_{\Delta}$$



تعریف: د مماس میل د منحني د تماس په ټکي کې د تابع له مشتق څخه په هغه ټکي کې عبارت دی، یا په بل عبارت د هغې زاویې له ټانجنټ څخه عبارت دی چې د Δ مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

لومړی مثال: د هغه مماس میل او معادله چې د $f(x)=2x^3-1$ په منحني د $A(1,1)$ په ټکي کې رسمېږي پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $m=\tan\alpha=f'(x)$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$f(x)=2x^3-1$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)^3-1-(2x^3-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2[x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+(\Delta x)^3]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-1-2x^3+1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x[6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[6x^2+6x(\Delta x)+(\Delta x)^2]=6x^2$$

بناءً د مماس د میل قیمت د $A(1,1)$ په ټکي کې مساوي دی په: $m=f'(x)=f'(1)=6x^2=6\cdot 1^2=6$

نو د مماس معادله په لاندې ډول ده:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-1=6(x-1)\ \Rightarrow\ y=6x-5$$

دویم مثال: د $y=x^2+1$ تابع د مماس د میل قیمت په $x_0=2$ ټکي کې په لاس راوړئ.

حل:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2+1-(x_0^2+1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2(\Delta x)x_0+(\Delta x)^2+1-x_0^2-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+(\Delta x))=2x_0$$

$$m=y'=2x_0=2\cdot 2$$

$$y'=m=4$$

دریم مثال: د $y=f(x)=x^2$ تابع ورکړل شوې ده، غواړو د $x=x_0$ په ټکي او په ځانګړي توګه د $x_0=2$ په ټکي کې د تابع مشتق پیدا کړئ:

$$x=x_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$$

اوس د لېمیټ د لاس ته راوړلو له لارې لیکلای شو:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

څرنګه چې $x_0 = 2$ دی، نو $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ یعنې د $x_0 = 2$ په ټکي کې د $y = f(x) = x^2$ د تابع لومړی مشتق له 4 سره برابر دی. دا په دې معنا چې د مستقیم خط میل د $x_0 = 2$ په ټکي کې 4 دی.

څلورم مثال: د $f(x) = x^3$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^{\ 3} + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو $f(x)$ د تابع مشتق د x_0 په ټکي کې برابر دی له: $f'(x_0) = 3x_0^2$

پنځم مثال: د x_0 په ټکي کې د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$f(x_0) + \Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - f(x_0)$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}$$

$$\Delta y = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot x_0(x_0 + \Delta x)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0 + 0)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ د x_0 په ټکي کې د $f(x)$ تابع مشتق دی.

پوښتنې

1. په لاندې پوښتنو کې د تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=5x^2-2$ 2) $f(x)=\frac{2}{x}$

2. **په ورکړل شویو ټکو کې د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.**

1) $f(x)=4x^2 \quad , \quad x_0=\frac{1}{2}$ 2) $f(x)=3x-1 \quad , \quad x_0=-1$

د مشتق قوانین

آیا کولای شئ چې د مخامخ تابع مشتق پرته د تزاید له لارې په بله طریقه پیدا کړئ؟

$$f(x) = 2x^2$$

1- د یوه ثابت عدد مشتق:

د $y = C$ تابع(C ثابت عدد) په پام کې ونیسئ.

- تابع ته د Δx په اندازه تزاید ورکړئ، د تابع د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟
- د تابع او متحول د تزاید نسبت تشکیل کړئ.
- د پورته مساواتو له دواړو خواوو لیمیټ ونیسئ په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د هرې ثابتې $f(x) = C$ تابع مشتق له صفر سره مساوي دی، ځکه چې د هرې ثابتې تابع گراف یوه افقي کرښه ده چې میل یې صفر دی.

ثبوت:

$$y = C$$
$$y + \Delta y = C$$
$$\Delta y = C - y$$
$$\Delta y = C - C$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$$
$$y' = 0$$

مثال: د $f(x) = \pi^4$ او $y = 100$ تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې π^4 او 100 ثابت عددونه دي، نو:

$$f(x) = C \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = \pi^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = 100 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

2- د یوې طاقت لرونکي تابع مشتق:

د $y = x^n$ تابع چې $n \in IR$ او $n \geq 1$ وي، په پام کې ونیسئ.

- متحول ته د Δx په اندازه تزاید ورکړئ، آیا تابع هم تزاید کوي که تزاید کوي په کومه اندازه، اړیکه یې ولیکئ؟
- له پورته اړیکې څخه د Δy قیمت پیدا کړئ، د متحول او تابع د تزاید نسبت تشکیل کړئ.
- د پورته مساوات له اطرافو څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

که چېرې $f(x) = x^n$ راکړل شوی وي، نو $f'(x) = nx^{n-1}$ سره کېږي.

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \quad \Rightarrow \quad \Delta y = (x + \Delta x)^n - y$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x - x)[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\Delta y = \Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]$$

$$y' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}}_{x^{n-1} \text{ څلې } n}$$

$$y' = nx^{n-1}$$

لومړی مثال: د $f(x) = x^5$ تابع مشتق د $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې وټاکئ.

حل:

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$

$$f(\frac{1}{2}) = 5 \cdot (\frac{1}{2})^4 = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = x^{-2}$ 2) $x(t) = gt^2$ 3) $t(x) = x^8$

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 5) $f(x) = 10^{10}$

3- د حاصل جمع مشتق:

د u او v مشتق منوونکي تابع ګانې په پام کې ونیسئ.

- آیا د $y=u+v$ تابع د مشتق وړ ده؟
- د $y=u+v$ په تابع کې $u(x)$ ته د Δu په اندازه او $v(x)$ ته د Δv په اندازه تزاید ورکړئ، د y د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟ د هغې اندازه ولیکئ.
- لومړی د تابع تزاید پیدا او بیا د رابطې دواړه خواوې په Δx وویشئ او وروسته یې لېمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

د یو حاصل جمع مشتق د حدونو د مشتقاتو د جمعې له حاصل سره مساوي ده:

$$y=u+v$$
$$y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v$$
$$\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-y$$
$$\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-u-v$$
$$\Delta y=\Delta u+\Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$ دی، نو : $y'=u'+v'$

4- د حاصل تفریق مشتق

که $y=u-v$ وي، نو $y'=u'-v'$ دی.

ثبوت یې د زده‌کوونکو کورنۍ دنده ده.

لومړی مثال: د $y=2x+1$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې $u=2x$ او $v=1$ دی، نو:

$$u'=1\cdot 2x^{1-1}=2x^0$$
$$u'=2$$
$$v'=0$$

بناءً: $y'=u'+v' \Rightarrow y'=(2x)'+(1)' \Rightarrow y'=2+0 \Rightarrow y'=2$

دویم مثال: د $f(x)=4x^2-3x+5$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: په دې تابع کې $u=4x^2$, $v=3x$ او $w=5$ دی چې $u'=8x$, $v'=3$ او $w'=0$ کېږي، نو:

$$y'=u'+v'+w'$$
$$y'=(4x^2)'-(3x)'+(5)'$$
$$y'=8x-3$$

دریم مثال: د لاندې تابع ګانو مشتقونه پیدا کړئ:

حل:

1) $y=12x-7$
$y'=(12x)'-(7)'$
$y'=12$

2) $f(x)=9x^2-12x+4$
$f'(x)=(9x^2)'-(12x)'+(4)'$
$f'(x)=18x-12$

3) $f(x)=6x^3-2x^2+6x-1$
$f'(x)=(6x^3)'-(2x^2)'+(6x)'-(1)'$
$f'(x)=18x^2-4x+6$

5- د حاصل ضرب مشتق:

که د u او v توابع مشتق منونکي وي، نو $u\cdot v$ هم مشتق منونکي ده، د $y=u\cdot v$ تابع په پام کې ونیسئ.

- **په پورتنۍ تابع کې u ته د Δu په اندازه، v ته د Δv په اندازه تزاید ورکړئ او د تابع تزاید پیدا کړئ.**
- د Δy د تزاید له پیدا کولو وروسته د مساوات اطراف په Δx وویشئ.
- د پورتنۍ رابطې له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=u\cdot v$$
$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v) \quad \Rightarrow \quad \Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-y$$
$$\Delta y=u\cdot v+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y'=v\cdot u'+u\cdot v'+0\cdot v'$$
$$y'=u'v+v'u$$

لومړی مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل: پوهېږو چې $y = u \cdot v$ شکل لري چې په دې صورت کې $y' = uv' + vu'$ دی.

$$\left.\begin{array}{l} u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 \Rightarrow v' = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y = x^3(x^2 - 3) \\ y' = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3) \\ y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{array}$$

دویم مثال: د $y = (5x - 1)^2$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د y تابع کولای شو د فکتورونو د ضرب په شکل داسې ولیکو:

$$y = (5x - 1)^2 = (5x - 1)(5x - 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 5x - 1 \Rightarrow u' = 5 \\ v = 5x - 1 \Rightarrow v' = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y' = 5(5x - 1) + 5(5x - 1) \\ y' = 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{array}$$

6- د حاصل تقسیم مشتق:

که د u او v تابع ګانې مشتق منونکی وي، نو $\frac{u}{v}$ کله چې $v \neq 0$ وي، هم مشتق منوونکی ده، اوس د $y = \frac{u}{v}$ تابع په پام کې ونیسئ.

- u او v ته په ترتیب سره د Δu او Δv په اندازه تزاید ورکړئ او د y تابع تزاید پیدا کړئ.
- د مساوات دواړه خواوې په Δx وویشئ.
- د پورتني رابطې له اطراف څخه په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي، لېمیټ ونیسي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=\frac{u}{v} \Rightarrow y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} \Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-y$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\cdot\Delta u-uv-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}\right)=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot\lim\limits_{\Delta v\to 0}(v+\Delta v)}$$

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

لومړی مثال: د $y=\frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د $\frac{u}{v}$ بڼه لري چې مشتق یې عبارت دی له:

$$\left.\begin{array}{l} u=2+3x \Rightarrow u'=3 \\ v=1-2x \Rightarrow v'=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=\frac{u}{v} \qquad \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2} \\ y'=\frac{3(1-2x)-[-2(2+3x)]}{(1-2x)^2} \\ \quad =\frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2}=\frac{7}{(1-2x)^2} \end{array}$$

یادونه: که چېرې وغواړو چې د یوې تابع مشتق په یوه ټاکلې نقطه لکه x_0 کې پیدا کړو د تابع په مشتق کې ټاکلی قیمت وضع کوو چې په پایله کې د تابع مشتق په هغه نقطه کې لاس راځی، لکه:

دویم مثال: د $f(y)=\frac{2y^2-3}{1-3y}$ د تابع مشتق د $y=0$ په ټکي کې پیدا کړئ:

حل: د تابع د حاصل تقسیم له مشتق څخه لرو:

$$f'(y)=\frac{4y(1-3y)-[-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2}=\frac{4y-12y^2+6y^2-9}{(1-3y)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=2y^2-3 \Rightarrow u'=4y \\ v=1-3y \Rightarrow v'=-3 \end{array}\right\}$$

$$f'(y)=\frac{-6y^2+4y-9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(0)=\frac{-6(0)^2+4(0)-9}{(1-0)^2}$$

$$f'(0)=-9$$

دریم مثال: د $f(t)=\dfrac{-3}{2t-1}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې تابع د $\dfrac{u}{v}$ بڼه لري، نو د $y=\dfrac{u}{v}$ له فورمول څخه په ګټه اخېستنې سره داسې عمل کوو:

$$\left.\begin{array}{ll} y=\dfrac{u}{v} & \Rightarrow y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \\ u=-3 & \Rightarrow u'=0 \\ v=2t-1 & \Rightarrow v'=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(t)=\frac{0\cdot(2t-1)-2(-3)}{(2t-1)^2}=\frac{6}{(2t-1)^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

1) $f(x)=\dfrac{3}{5}x(x-2)$

2) $g(x)=(2x-3)(x-3)$

3) $f(x)=(2x-1)^2$

4) $f(t)=\dfrac{t^2}{1-2t}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$

6) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

7) $f(x)=3x^5-5x^2$

8) $f(x)=7x+3$

7- د یوې جذرالمربع تابع مشتق:

د $y=\sqrt{x}$ تابع په پام کې ونیسي.

- د $y=\sqrt{x}$ تابع متحول ته د Δx په اندازه تزاید ورکړئ د تابع تزاید پیدا کړئ.
- د لاس ته راغلي رابطې له دواړو خواوو څخه لیمیټ په هغه صورت کې ونیسي چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$$
$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د $u\cdot v$ بڼه لري، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{x} \Rightarrow u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v=x^2-1 \Rightarrow v'=2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)+2x\cdot\sqrt{x} \\ f'(x)=\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}=\dfrac{x^2-1+4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\ \qquad =\dfrac{x^2-1+4x^2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5x^2-1}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

8- د $\sqrt{u}$ تابع مشتق

- که چېرې y د u او u د x تابع او مشتق منوونکي وي د y اړیکه u ته او u، x ته څه فکر کوئ.
- د u متحول ته د Δu په اندازه تزاید ورکړئ د Δy د تزاید په اړه څه فکر کوئ.
- د مساواتو له دواړه خواوو څخه لېمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$
$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$
$$\Delta y = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو او بیا د مساوات له دواړو خواوو څخه لېمیټ نیسو چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

د ویم مثال: د $h(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د $y = u \cdot v$ او $y = \sqrt{x}$ د فورمولونو له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لرو:

$$\left.\begin{array}{ll} u = x^2 + x & \Rightarrow u' = 2x + 1 \\ v = \sqrt{x} & \Rightarrow v' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h'(x) = (2x+1)\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) \\ h'(x) = 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \dfrac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) = \dfrac{4x^2 + 2x + x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

دریم مثال: د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(x+3)$ تابع د مشتق قیمت په $x=8$ ټکي کې په لاس راوړئ.

حل: د $y=u\cdot v$ او $y=\sqrt[n]{u}$ تابع له مشتق څخه په ګټه اخېستنې سره لیکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt[3]{x}-1\Rightarrow u'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v=x+3\Rightarrow v'=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+3)+1(\sqrt[3]{x}-1) \\ f'(x)=\dfrac{x+3}{3\sqrt[3]{x^2}}+(\sqrt[3]{x}-1) \end{array}$$

اوس د تابع مشتق د $x=8$ په نقطه کې پیدا کوو:

$$f'(8)=\frac{8+3}{3\sqrt[3]{8^2}}+\sqrt[3]{8}-1=\frac{11}{12}+1=\frac{23}{12}$$

پوښتنې

1- د لاندې توابعو مشتقونه پیدا کړئ.

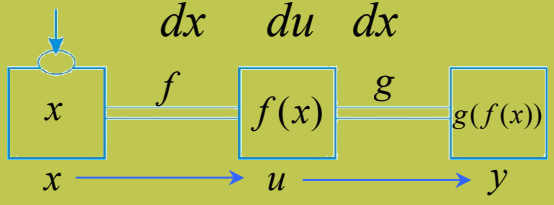
$$f(x)=\frac{1}{x+1} \quad , \quad y=3x^{-3} \quad , \quad f(x)=x^2+3$$

2- که $f(x)=x^2-3x$ او $g(x)=\sqrt{x}-1$ وي، د دې تابع ګانو د جمعې، ضرب او تقسیم مشتقونه پیدا کړئ. $[(f+g)',(f\cdot g)',(f\div g)' \quad g\neq 0]$

د مرکبو تابع گانو مشتق(زنځیري قاعده)Chain Rule

د مخامخ اړیکې او شکل په اړه خپل نظر بیان کړئ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$



که چېرې y د u او u د x تابع وي او د اشتقاق وړ وي.

- وواياست چې y د u او u له x سره څه اړیکه لري؟
- آیا د $\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$ مساوات حقیقت لري؟
- د پورتني مساوات دواړې خواوې په Δx وویشئ.
- که د ښي اړخ د کسرونو د مخرجونو ځایونه بدل شي، په پورتني رابطه کې بدلون راځي؟
- د پورتني مساوات له اطراف څخه په هغه صورت کې لېمیټ ونیسي چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

د تابع، تابع مشتق ثبوت او پایله یې په لاندې ډول ده.

ثبوت:

$$\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_{(u)}$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_{(x)}$ دی، نو: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د دې زنځیري قاعدې پر بنسټ لاندې پایلې لیکلای شو:

1- که $y=u^n$ وي؛ نو $y'=nu^{n-1}\cdot u'$ کېږي.

2- که $y=\sqrt[n]{u}$ وي، نو $y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ کېږي.

مثال: د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y=(2x^2-1)^3$ 2) $y=\sqrt{1-x^2}$ 3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$ 5) $y=(x^2-2)^{-3}$

حل: د زنځیري قاعدې په مرسته لیکلای شو چې:

1) $y=\underbrace{(2x^2-1)^3}_{u}$

$u=2x^2-1\Rightarrow u'_x=4x$

$y=u^3\Rightarrow y'_u=3u^2$

$\Rightarrow y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

$y'=3(2x^2-1)^2\cdot 4x=3(4x^4-4x^2+1)\cdot 4x$

$=(12x^4-12x^2+3)\cdot 4x=48x^5-48x^3+12x$

$=12x(4x^4-4x^2+1)\quad =12x(2x^2-1)^2$

2) $y=\sqrt{1-x^2}$

$u=1-x^2\quad\Rightarrow u'_{(x)}=-2x$

$y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$\Rightarrow\quad y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

لیدل کېږي چې تابع د ضرب د حاصل بڼه لري، نو:

$y=u\cdot v\ \Rightarrow\ y'=u'v+v'u$

3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

$u=(x^2-3)^2$

$u'_{(x)}=2(x^2-3)(2x)$

$v=2x^3\Rightarrow\ v'_{(x)}=6x^2$

$y'=\left[(x^2-3)^2\right]'\cdot 2x^3+\left[2x^3\right]'(x^2-3)^2$

$y'=\left[2(x^2-3)\cdot 2x\right]2x^3+6x^2(x^2-3)^2$

$=8x^4(x^2-3)+6x^2(x^2-3)^2$

$=8x^6-24x^4+6x^2(x^4-6x^2+9)$

$=8x^6-24x^4+6x^6-36x^4+54x^2$

$=14x^6-60x^4+54x^2$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$

$u=x^2-2x^3$

$u'_{(x)}=2x-6x^2$

$y=\sqrt[n]{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

$y'=\dfrac{2x-6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x^3)^2}}$

5) $y=(x^2-2)^{-3}$

$u=x^2-2$

$u'_{(x)}=2x$

$y=u^n\Rightarrow y'=nu^{n-1}\cdot u'$

$y'=-3(x^2-2)^{-4}\cdot 2x=\dfrac{-6x}{(x^2-2)^4}$

یادونه:

I. که چېرې د f تابع د (x_0) په ټکي کې مشتق ولري، نو $f'(x_0)$ د هغه مماس میل دی چې د $((x_0)\ ,\ f(x_0))$ په نقطه کې له منحني یا د تابع له ګراف سره رسمېږي.

مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع میل د $x_0=1$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_0=1$ دی، نو: $f(x_0)=1$ سره کېږي او $P(1,1)$ چې د تماس ټکی دی، میل یې عبارت دی، له:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3 \quad \Rightarrow \quad f'(1)=3$$

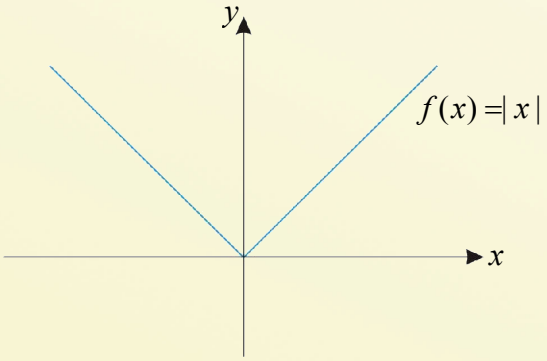
II. که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع د x_0 په ټکي کې متمادي ده، خو برعکس یې سم نه ده، یعنې کېدای شي، یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

مثال: د $f(x)=|x|$ د تابع مشتق د په $x=0$ ټکي کې پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې مشتق په حقیقت کې د نیوټن د نسبت د لېمیټ محاسبه ده چې د ښي او کیڼ اړخ لېمیټونه یې په صفر کې سره وخېړل شي.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$



لیدل کېږي چې $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ دی، نو تابع په $x = 0$ کې د مشتق وړ نه ده، ولې تابع د صفر په ټکي کې متمادي ده.

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (x^2 + 2)^2$

2) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)^{-4}$

3) $y = (1 - 2x^3)^4$

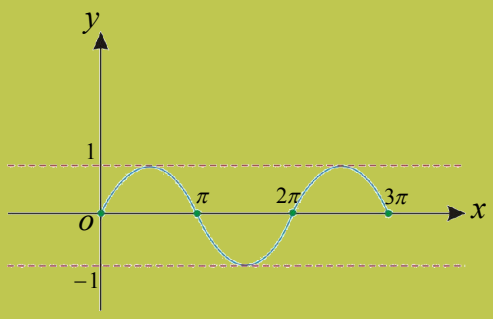
4) $h(z) = \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$

5) $f(t) = \sqrt[3]{3t+1}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 + x^2 + x^3}}$

د مثلثاتي تابع ګانو مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع را ښيي؟



- مثلثاتي دايره او راديان تعريف کړئ.
- آيا دا $-1 \le \sin x \le 1$ اړيکه حقيقت لري او که نه؟
- د $y = \sin x$ تابع په پام کې ونيسئ متحول ته د Δx په اندازه بدلون ورکړئ او د تابع بدلون په پام کې ونيسئ.
- د $\sin(x+\Delta x) - \sin x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ؟
- د پورتنۍ رابطې له انکشاف څخه وروسته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت جوړ او د مساوات له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لېميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورته فعاليت څخه پايله داسې ثبوتوو:

1- د $y = \sin x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sin x$$
$$y + \Delta y = \sin(x+\Delta x)$$
$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$$
$$\Delta y = 2\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x-x}{2} = 2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\cdot 2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y'(x) = \cos x\cdot 1$$
$$y' = \cos x$$
$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

که چېرې $f(x) = \sin u$ وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي، نو ليکلای شو:

$$f(u)=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sin 4x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin 4x \\ u=4x \Rightarrow u'=4 \\ f(x)=\sin u \Rightarrow y'_u=\cos u \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=\sin u \ \Rightarrow f'(x)=u'\cos u \\ f(x)=\sin 4x \Rightarrow f'(x)=4\cos 4x \end{array}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3\cdot\csc x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x=x^3\cdot\dfrac{1}{\sin x} \\ u=x^3 \Rightarrow u'=3x^2 \\ v=\dfrac{1}{\sin x} \Rightarrow v'=\dfrac{-uv'}{v^2}=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x \\ f'(x)=3x^2\cdot\csc x+\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}\cdot x^3 \\ \qquad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x\cdot x \\ \qquad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x \end{array}$$

پوښتنې

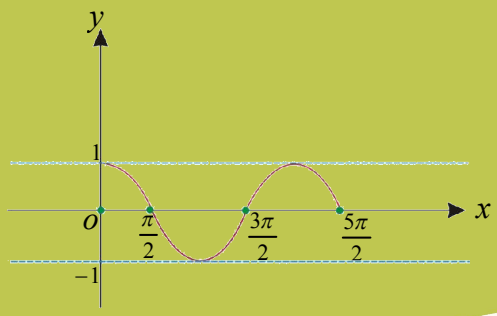
د لاندې توابعو مشتق په لاس راوړئ:

$a)\ y=\sin 5x$ $\qquad b)\ y=\dfrac{\sin x}{1+x}$

$c)\ y=\sqrt{1+\sin x}$

د $y=\cos x$ تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع را ښيي؟



- د $y=f(x)=\cos x$ په تابع کې متحول ته د Δx او تابع ته د Δy په اندازه تزاید ورکړئ.
- د $\cos(x+\Delta x)-\cos x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ.
- د پورتنۍ انکشافي رابطې په مرسته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت تشکیل او له اطرافو څخه لېمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

2- د $y=\cos x$ تابع مشتق

ثبوت:

$$y=\cos x$$

$$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$$

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x$$

$$\Delta y=-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}$$

$$\Delta y=-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x\cdot 1$$

$$\boxed{y=\cos x \quad\Rightarrow\quad y'=-\sin x}$$

یا په لنډ ډول هغه داسې ثبوتوو:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$(\cos x)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(-2\sin x\cos x)$$

پوهېږو $\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$ چې سره دی، نو:

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}(-2\sin x\cdot\cos x)$$

$$\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$$

که چېرې $y=\cos u$ وي، په داسې حال کې چې u د x تابع وي، نو لیکلای شو:

$$\boxed{y=\cos u\Rightarrow y'=-u'\cdot\sin u}$$

لومړی مثال: د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=\sin 2x=2\sin x\cos x$ 2) $f(x)=x-\sin x\cos x$

حل: پوهېږو چې $y=u\cdot v\Rightarrow y'=u'\cdot v+v'u$ دی، نو:

1) $f(x)=\sin 2x=2\sin x\cos x$

$$f'(x)=(2\sin x)'\cos x+(\cos x)'\cdot 2\sin x=2\cos^2 x-2\sin^2 x$$

$$f'(x)=2(\cos^2 x-\sin^2 x)\Rightarrow y'=2\cos 2x$$

2) $f(x)=x-\sin x\cos x$

$$f'(x)=(x)'-(\sin x\cdot\cos x)'=(x)'-[(\sin x)'\cdot\cos x+(\cos x)'\cdot\sin x]$$

$$f'(x)=(x)'-[\cos x\cos x+(-\sin x\sin x)]=1-\cos 2x$$

پوښتنې

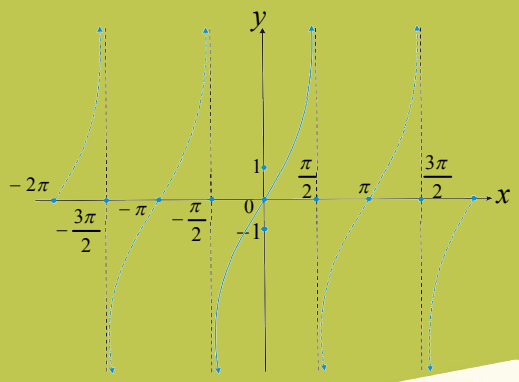
د لاندې تابع ګانو لومړی مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=(\sec 2x+\tan 2x)^2$ 2) $f(x)=\sin^2 x$ 3) $f(x)=\sec x$

4) $f(x)=\csc x$ 5) $f(x)=\dfrac{5\sin^2 2x}{3\cos 5x}$

د $y = \tan x$ تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع راښيي.



- د $y = \tan x$ تابع د نسبت په شکل ولیکئ.
- له پورتني نسبت څخه مشتق ونیسئ، هغه له څه سره مساوي کېږي.

له پورته فعالیت څخه پایله داسې ثبوتوو:

3- **د $y = \tan x$ تابع مشتق**:

ثبوت:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan x$$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

پاتې فورمولونه زده‌کوونکو ته پرېږدو.

لومړی مثال: د لاندې مثلثاتي تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y = \tan^3 x$$

حل: پوهېږو چې که $y = u^n$ وي نو مشتق یې $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ سره دی، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u = \tan x \\ u' = \sec^2 x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \tan^3 x \\ y' = 3\tan^2 x \sec^2 x \end{array}$$

دویم مثال: د $y=\sec x\cdot\cot x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې تابع د $y=u\cdot v$ شکل لري، نو:

$$y=\sec x\cdot\cot x$$
$$u=\sec x \quad\Rightarrow\quad u'=\sec x\tan x$$
$$v=\cot x \quad\Rightarrow\quad v'=-\csc^2 x$$

د u',v,u او v' قیمتونه د $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$ په فورول کې وضع کوو:

$$y'=\sec x\tan x\cdot\cot x+\sec x(-\csc^2 x)$$
$$=\sec x\tan x\frac{1}{\tan x}-\csc^2 x\sec x$$
$$=\sec x-\csc^2 x\sec x$$

پوښتنې

د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

$a)\ \ y=\tan x\cot x$

$b)\ \ y=(x^2+x-1)\tan^2 x$

$c)\ \ y=\dfrac{1}{\tan x}$

$d)\ \ y=\tan x\sec x-\cot x$

ضمني مشتقات

مخامخ مساوات په عبارت سره ولیکئ.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

- د $y = 2x^2 - 4$ تابع مشتق پیدا کړئ.
- د $y^2 + xy = 1$ تابع څو متحوله تابع ده؟ ګراف یې څه ډول شکل لري؟
- د پورتني تابع مشتق پیدا کولای شئ.

د یوې منحني خط معادله د وضعیه کمیاتو په سیستم کې عبارت له $y = f(x)$ څخه ده، له دې ځایه $y - f(x) = 0$ کېږي او $y - f(x)$ یوه دوه متحوله تابع د x او y له جنسه ده، که $F(x,y) = y - f(x)$ تابع په پام کې ونیسو، نو د دې منحني معادله د $F(x,y)$ شکل غوره کوي، د مثال په ډول: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ وي، نو د $F(x,y) = 0$ له معادلې څخه لیکلای شو چې $x^2 + y^2 - 25 = 0$ یا $x^2 + y^2 = 25$ چې د دې دوو بېلا بېلو توابعو معادلې $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ دي.

په عمومي ډول د $F(x,y) = 0$ معادله کېدای شي چې د څو تابع ګانو معادله د $y = f(x)$ په بڼه وي، پاملرنه وکړئ.

د $y = f(x)$ په تابع کې چې x او y یو له بل څخه جلا وي، نو مشتق یې په آسانۍ پیدا کولای شو، ولې په ځینو رابطو کې y له x سره یو ځای بیان شوی دي لکه په $xy^2 - y + 1 = 0$ چې د مشتق په نیولو کې که د x له جنسه مشتق نیسو، نو y یو ثابت عدد فرضوو او که د y له جنسه مشتق نیسو x ثابت فرضوو، لکه:

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$(xy^2)' - (y)' + (1)' = 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy + 1)$$

$$y' = \frac{y^2}{-2xy + 1}$$

په عمومي حالاتو کې که تابع غیر صریح وي په دې معنا چې مستقل متحول او د تابع متحول پکې څرګند نه وي، نو ددې ډول تابع مشتق د ضمني مشتق په نامه یادیږي او د هغه مشتق په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته(} y \text{ ثابت دی)}}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته(} x \text{ ثابت دی)}}$$

لومړی مثال: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ ضمني تابع مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: د $y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$ رابطې څخه $y'_{(x)} = \frac{-f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ پیدا کوو.

$$y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} f'_{(x)} &= y'_x - (\sin\frac{x}{y})'_x - (1)'_x \\ &= 0 - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - 0 = \frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y} \\ f'_{(y)} &= y'_y - (\sin\frac{x}{y})'_y - (1)'_y \\ &= 1 - \cos\frac{x}{y}(\frac{x}{y})'_y - 0 = 1 - \frac{-x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y} = 1 + \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د x او y قیمتونه وضع کوو چې د $y'(\pi, 1)$ په لاس راځي.

$$y'_{(\pi,1)} = \frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{1}\cos\pi}{1 + \frac{\pi}{1}\cos\pi} = \frac{-1}{1 + \pi(-1)} = \frac{1}{\pi - 1}$$

دویم مثال: د $x^2y + 2y^3 = 3x + 2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$x^2y + 2y^3 = 3x + 2$$

$$x^2y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$

$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

$$f'_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$f'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{-2xy + 3}{x^2 + 6y^2}$$

دریم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$f'_{(x)} = -2x$$
$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$
$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

او یا په بله طریقه:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$
$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$
$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$
$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

د تابع دویم ضمني مشتق

د ضمني رابطې د دویمې مرتبې د ضمني مشتق د پیدا کولو لپاره د فورمول په مرسته لومړی د ضمني اړیکې لومړی مشتق پیدا کوو او بیا له دې رابطې څخه مشتق نیسو.

لومړی مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ رابطې دویمه ضمني مشتق $y''_{(x)}$ پیدا کړئ.

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$
$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$
$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$
$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$
$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

او یا به بله طریقه:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x - 0 - 0}{0 - 2y - 0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

اوس د $y' = \frac{x}{y}$ له رابطې څخه دویم ضمني مشتق نیسو:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'y - y'x}{y^2} = \frac{y - y'x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y}\cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

دویم مثال: د $x^2+xy+y^2-3=0$ په معادله کې د y مشتق نسبت x ته د $(1,1)$ په ټکي کې پیدا او پر منحني د مماس معادله ولیکي.

حل: څرنګه چې د $(1,1)$ ټکی په معادله کې صدق کوي، نو نوموړی ټکی د منحني پرمخ واقع دی، د $y'_{(x)}$ د پیدا کولو لپاره په ورکړ شوي معادلې کې لیکلای شو:

$$f'_{(x)}=2x+y$$
$$f'_{(y)}=x+2y$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2x+y}{x+2y} \quad , \qquad x+2y\neq 0$$
$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}=-\frac{2+1}{1+2}=-1$$
$$y-y_1=m(x-x_1) \;\Rightarrow\; y-1=-(x-1) \;\Rightarrow\; y=-x+2$$

او یا په بله طریقه هم کولای شو د تابع ضمني مشتق په لاس راوړو:

$$x^2+xy+y^2-3=0$$
$$2x+y+x\cdot y'+2yy'=0$$
$$2x+y+(x+2y)y'=0$$
$$(x+2y)y'+2x+y=0$$
$$(x+2y)y'=-2x-y$$
$$y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

دریم مثال: د $x^2y^3=5y^3+x$ غیر صریح تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$x^2y^3-5y^3-x=0$$
$$f'_{(x)}=2xy^3-0-1=2xy^3-1$$
$$f'_{(y)}=3x^2y^2-15y^2-0$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy^3-1}{3x^2y^2-15y^2}=\frac{1-2xy^3}{3x^2y^2-15y^2}$$

پوښتنې

1- د $x\sin y+y\cos x=5$ د غیر صریح تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

2- د $x^3+xy^2+y=3$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

3- د $x^2+y^2=4x+4y$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

لوړ مرتبه یي مشتقات

د مخامخ تابع درې ځلې مشتق ونیسئ؟ $f(x)=\sin x$

د مخامخ تابع پنځه ځلې مشتق ونیسئ؟ $f(x)=\cos x$

فعالیت

- د $y=2x^4-3x^3-2x-1$ تابع مشتق پیدا کړئ.
- د پورته تابع دویم مشتق پیدا کړئ.
- د پورتني مشتق د تابع دریم ځل مشتق ونیسئ.
- د پورتني تابع نور څو ځلې مشتق نیولی شو؟
- د پورتني تابع څووم مشتق له صفر سره مساوي دی؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که د $y=f(x)$ مشتق منونکی وي، لومړی مرتبه مشتق یې په $y'=f'(x)$ ، دویمه مرتبه مشتق یې په $y''=f''(x)$ دریمه مرتبه مشتق یې په $y'''=f'''(x)$ ... په کلي ډول $n-$ام مرتبه مشتق د $y=f(x)$ تابع په $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ علامې سره ښیو.

لومړی مثال: د $f(x)=x^3-3x^2+4x-1$ تابع دریم مشتق په لاس راوړئ.

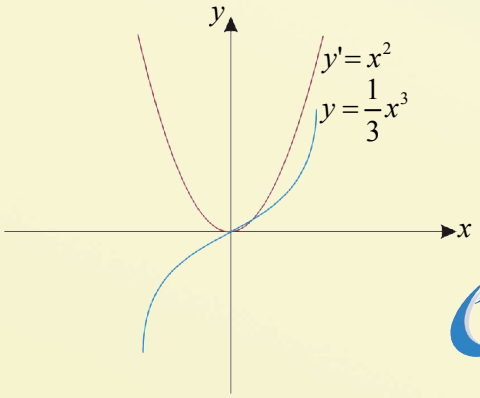
حل:

$$y=x^3-3x^2+4x-1$$
$$y'=3x^2-6x+4$$
$$y''=6x-6$$
$$y'''=6$$

دویم مثال: د $y=\frac{1}{3}x^3$ تابع ګراف او د هغې د لومړی مرتبې مشتق تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

$$y=\frac{1}{3}x^3$$
$$y'=\frac{3}{3}x^2=x^2$$
$$y'=x^2$$



دریم مثال: که $y=\sin x+\cos x$ وي، د $(y^{(9)})^2+y^2$ قیمت پیدا کړئ.

حل: لومړی د تابع نهمه مرتبه مشتق یا $(y^{(9)})$ په لاس راوړو:

$$y=\sin x+\cos x$$
$$y'_{(x)}=\cos x+(-\sin x)=\cos x-\sin x$$
$$y''_{(x)}=-\sin x-(\cos x)=-\sin x-\cos x$$
$$y'''_{(x)}=-\cos x-(-\sin x)=\sin x-\cos x$$
$$\vdots$$
$$f'^{(9)}_{(x)}=\cos x-\sin x$$
$$(y^{(9)})^2+y^2=(\cos x-\sin x)^2+(\sin x+\cos x)^2$$
$$=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$$
$$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$$

څلورم مثال: د $y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$ د تابع پنځه ځلې مشتق پیدا کړئ.

$$y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$$
$$y'=12x^5-15x^4-6x^2-6x$$
$$y''=60x^4-60x^3-12x-6$$
$$y'''=240x^3-180x^2-12$$
$$y^{(4)}=720x^2-360x$$
$$y^{(5)}=1440x-360$$

یادونه: که چېرې $n-$ام درجه‌یي څو جمله‌یي تابع $f_{(n)}(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots+c_nx^n\quad c_n\neq 0$ راکړی شوی وي $n-$ام مشتق یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots\ +c_nx^n \qquad c_n\neq 0$$
$$f'_{(x)}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ \dots\ +nc_nx^{n-1}$$
$$f''_{(x)}=2c_2+6c_3x+\ \dots\ +n(n-1)c_nx^{n-2}$$
$$f'''_{(x)}=6c_3+12c_4x+\ \dots\ +n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$
$$f^n(x)=n(n-1)(n-2)\ \dots\ c_n=n!c_n$$

په عمومي ډول که $k>n$ وی، نو: $f^k(x)=0$

پوښتنې

د لاندې تابعگانو تر هغې مشتق ونیسئ چې د مشتق تابع له صفر سره مساوي شي.

1) $y=4x^4-3x^3-2x$

2) $y=(5x-2)^3$

3) $y=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$

4) $y=\sin x$

– که چېرې د $P(x, f(x))$ او $Q(x+h, f(x+h))$ ټکی د $f(x)$ تابع دوه اختیاري ټکي وي، نو لاندې اړیکه د Newton خارج قسمت په نامه یادېږي:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د منحني د مماس میل په یوه اختیاري ټکي کې عبارت دی، له:

$$m_T=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د یوې تابع مشتق: د تابع او متحول د تزاید، د نسبت لېمیټ کله چې $\Delta x\to 0$ وکړي، د مشتق په نامه یادېږي او په $f'(x)$ ، $\frac{dy}{dx}$ سره ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'$$

که چېرې د $f(x)$ تابع د (x_0) په یوه ټکي کې د مشتق وړ وي، نو $f'(x)$ د مماس میل د منحني سره د $(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې دی.

که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع په x_0 کې متمادي ده، خو ددې برعکس سمه نه ده، یعنې کېدای شي یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

د $f(x)$ د تابع مشتق د C پر منحني $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\tan\alpha=\tan\theta=m_\Delta$$

د تماس په ټکي کې له یوې منحني سره د مماس میل د هغې تابع د مشتق په نوم یادېږي.

که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو یوه تابع په لاس راځي چې دا د مشتق تابع بلل کېږي.

که د f تابع د (x_0-r, x_0+r) په فاصله کې($x_0=x$ په شاوخوا) کې تعریف شوی وي او د هغې لېمیټ موجود وي، په دې حالت کې کولای شو چې یو مماس خط د $f(x)$ د تابع په منحني د $x=x_0$ په ټکي کې رسم کړو، د دې مماس میل عبارت دی له: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

د مشتق قوانین:

1) $f(x)=C \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$

2) $f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$

3) $f(x)=u\pm v \quad \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$

4) $f(x)=u\cdot v \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'v+v'u$

5) $f(x)=\dfrac{u}{v} \quad , \quad v\neq 0 \Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

6) $f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

7) $f(x)=\sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

8) $f(x)=\sqrt[n]{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

د مرکبو توابعو مشتق: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د مثلثاتي تابع گانو مشتق:

1) $y=\sin x \quad \Rightarrow \quad y'=\cos x \quad , \quad y=\sin u \quad \Rightarrow \quad y'=u'\cos u$

2) $y=\cos x \quad \Rightarrow \quad y'=-\sin x \quad , \quad y=\cos u \quad \Rightarrow \quad y'=-u'\sin u$

که د $y=f(x)$ تابع مشتق منونکی وي، په بشپړ ډول n-ام ځلې مشتق یې $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ دی.

د دویم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1- $f(x)=x^2-x$ منحني میل د $P(3,0)$ په ټکي کې عبارت دی له:

$a)\ 3 \qquad b)\ -3 \qquad c)\ 5 \qquad d)\ -5$

2- د $f(x)=2x^2$ په تابع کې د f متوسط بدلون د $[3\ ,4]$ په انتروال کې عبارت دی له:

$a)\ 18 \qquad b)\ 14 \qquad c)\ -14 \qquad d)\ 32$

3- د $y=2x^2-3x^{-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=4x^2+3 \qquad b)\ y'=4x+\frac{1}{2}x \qquad c)\ y'=4x+\frac{3}{x^2} \qquad d)\ y'=4x$

4- د $f(x)=\sqrt{x-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ 0 \qquad b)\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \qquad c)\ \frac{x-1}{2\sqrt{x}} \qquad d)\ \frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5- د $f(x)=2x^2+x$ تابع د $x=1$ په ټکي کې د مماس خط معادله عبارت ده له:

$a)\ y=5x-2 \qquad b)\ y=x-3 \qquad c)\ y=5 \qquad d)\ y=5x$

6- د $y=\frac{2x}{-x+4}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-4x+8 \qquad b)\ y'=-2 \qquad c)\ y'=\frac{4x+8}{(-x+4)} \qquad d)\ y'=\frac{8}{(-x+4)^2}$

7- د $y=(2-x^2)^3$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-6x^5+2x^3-24x \qquad b)\ y'=3(2-x^2)^2 \qquad c)\ y'=3(-2x)^2 \qquad d)$ هېڅ یو

8- د $y=\sin x$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\sin x \qquad b)\ y'=\cos x \qquad c)\ y'=-\sin x \qquad d)\ y'=-\cos x$

9- د $y=(1+x^4)^{\frac{-1}{5}}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-\frac{4}{5}x^3(1+x^2)^{\frac{-6}{5}} \qquad b)\ y'=-\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$

$c)\ y'=-4x^3 \qquad d)$ هېڅ یو

10- د $y=\frac{\cos}{1-\cos x}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} \qquad b)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)} \qquad c)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2} \qquad d)$ هېڅ یو

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\dfrac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

2. د $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

3. د $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

4. د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

5. د $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ د تابع مشتق د $\dfrac{\pi}{4}$ په ټکي کې پیدا کړئ.

6. د $f(x)=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{1+\sin 2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

7. د $y=\cos x$ تابع اتمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.

8. د $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ تابع نهمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.

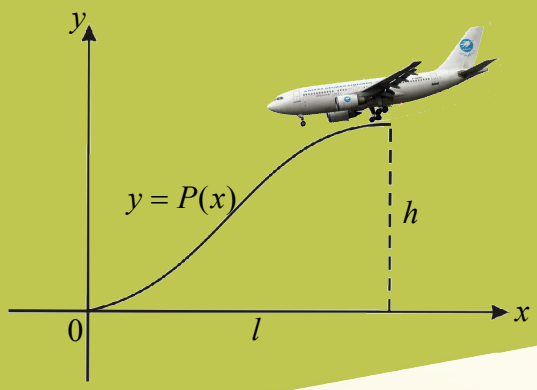
9. د $x^2+xy+y^2=3$ تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

دریم څپرکی

د مشتق د استعمال ځایونه

د مشتق د استعمال ځایونه

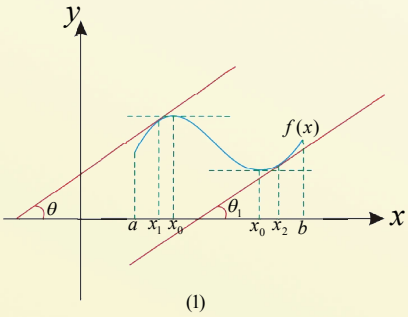
د مخامخ شکل د ارتفاع په اړه خپل نظر بیان کړئ.

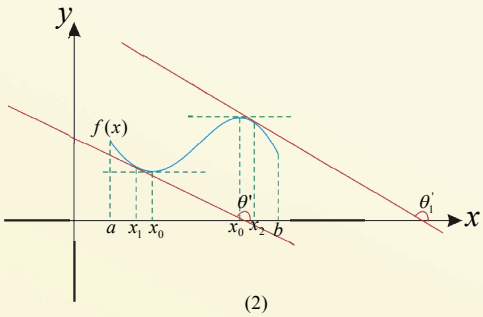


له مشتق څخه په ډېرو ځایونو کې، لکه: (په فزیک کې د حرکت، سرعت او تعجیل اړوند معادلې د مشتق څخه په ګټه اخېستنې سره حلېږي همدارنګه په کیمیا کې هم، د تابع د تحولات، د ځینو لېمیټونو په پیدا کولو کې) کار اخیستل کېږي چې ځینې ځایونه یې دلته تر څېړنې لاندې نیسو.

I- د یوې تابع تحولات:

لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:





- متزایدې او متناقصې توابع څه ډول توابع دي؟
- د (1) شکل په (a,b) انتروال کې د x_0 ، x_1 او x_2 په ټکو کې د رسم شویو مماسونو میلونه د (2) شکل له مماسونو سره پرتله کړئ.
- په (1) او (2) شکلونو کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی په ګوته کړئ.

- په پورته شکلونو کې وښيې چې کومه تابع په کومه ساحه کې متزايده او په کومه ساحه کې تابع متناقصه ده؟
- په متزايده، متناقصه او ثابته تابع کې مشتق و څېړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او په (a,b) انتروال کې د مشتق وړ وي، نو که چېرې په ورکړل شوي انټروال کې $f'(x)>0$ وي، تابع په هغه انتروال کې متزايده بلل کېږي.

2- که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او د (a,b) په انتروال کې د مشتق وړ وي که به ورکړ شوي انټروال کې $f'(x)<0$ وي، نو تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي.

يادونه:د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول قيمت په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x د متحول د قيمت په زياتېدو سره د y يا تابع قيمت کم پاتې شي.

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^3+3x+1$ تابع گراف متزايد ده.

حل:څرنگه چې تابع کسري بڼه نه لري، نو ټول حقيقي عددونه د تعريف ساحه کېدای شي او هم پوهېږو چې د تابع د تزايد شرط $f'(x)>0$ دی، نو لازمه ده چې د تابع مشتق تر مطالعې لاندې ونيسو:

$$f(x)=x^3+3x+1$$
$$f'(x)=3x^2+3$$

ليدل کېږي چې د مشتق لومړی حد تام مربع دی، نو د x د ټولو قيمتونو لپاره همېشه مثبت دی. کله چې $(+3)$ ورسره جمع شي بيا هم قيمت يې مثبت دی، نو د $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزايده ده.

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+5$ تابع په کوم انتروال کې متناقصه ده؟

حل: څرنگه چې د $f(x)$ تابع په هر انتروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو د متناقص تابع لپاره لرو $f'(x)<0$ دی، يعنې:

$$f'(x)=3x^2-3<0$$
$$f'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x=\pm 1$$

لیدل کېږي چې د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انتروال کې منفي دی، نو تابع په همدې انتروال کې $(-1,1)$ متناقصه ده.

دریم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د تعریف ساحه پیدا او وروسته د تابع د تزاید شرط په کې څېړو:

$$D_f \to IR$$
$$f(x) = 5x - 4$$
$$f'(x) = 5 > 0$$

څرنګه چې $f'(x) > 0$ نو د ټولو قیمتونو لپاره همېشه مثبت دی. نو تابع متزایده ده.

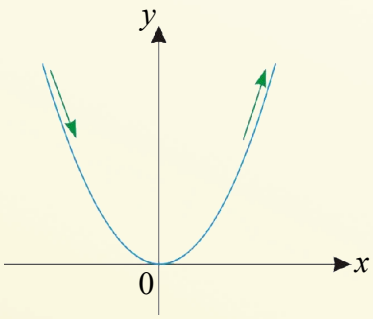
څلورم مثال: د $y = x^2$ د تابع ګراف ته ځیر شئ او وښیئ چې ورکړل شوي تابع په کوم انټروال کې متزایده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

حل: پوهېږو چې که تابع متناقصه وي $y' < 0$ او که تابع متزایده وي $y' > 0$ څخه دی، نو لیکلای شو چې:

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 2x$$

د تناقص شرط $y' < 0 \quad \Rightarrow \quad 2x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$

د تزاید شرط $y' > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$



x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
y	$+\infty$	↘	4	↘	1	↘	0	↗	1	↗	4	↗	$+\infty$

د تابع له ګراف څخه لیدل کېږي چې تابع د $(-\infty,0)$ په انتروال کې متناقصه او په $(0,+\infty)$ انتروال کې متزایده ده.

پوښتنې

1- د $f(x)=ax+b$ د تابع تحولات وښیئ؟

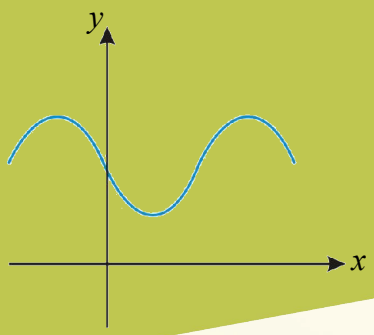
2- د $y=\frac{-3}{4}x-1$ د تابع تحولات وښیئ؟

3- وښیاست چې د $f(x)=2x^2+3x+1$ تابع په کوم انتروال کې متزایده ده؟

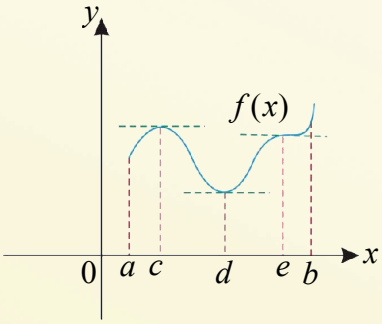
4- د $y=x^2+3x+2$ د تابع د تزاید انتروال و ټاکئ؟

د یوې تابع بحراني (Critical Point) ټکي (اعظمي Maximum او اصغري Minimum)

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی وښیئ او ووایئ چې دا ټکي د څه په نامه یادېږي؟



که په لاندینې شکل کې د $f(x)$ تابع د (a,b) په انتروال کې د مشتق وړ وي.



- د متحول د قیمت په زیاتوالي په کوم انټروال کې د تابع قیمت لویېږي.
- د متحول د قیمت په کموالي په کوم انټروال کې د تابع قیمت کمېږي.
- د تابع تحولات په (c,d) او (d,e) انتروال کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع مشتق په کومو ټکو کې له صفر سره مساوي دی.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

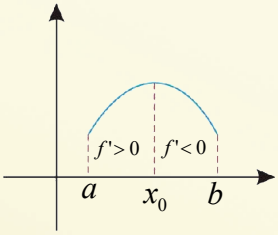
د یوې تابع په ګراف کې د y پر محور تر ټولو لوړې نقطې ته اعظمي(maximum) او تر ټولو ټیټې نقطې ته د تابع اصغري(minimum) نقطه وايي، د x د هغو قیمتونو لپاره چې تابع اعظمي او یا اصغري قیمتونه اخلي د بحراني(*Critical Point*) نقطو په نامه یادېږي.

تعریف:

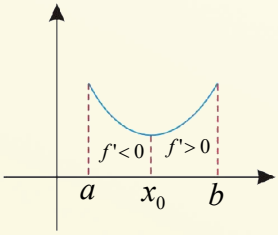
1- **ثابته تابع**: که چېرې د یوې تابع لومړی مشتق همیشه له صفر سره مساوي وي تابع ته ثابته تابع وايي.

2- **متزایده تابع**: که چېرې د یوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې مثبت وي تابع په هغه فاصله کې متزایده بلل کېږي، یعنې $y'>0$ چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.

3- **متناقصه تابع**: که چېرې د یوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې منفي وي یعنې $y'<0$ وي، تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.



(1)



(2)

1- **اعظمي ټکی**: که چېرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تزاید له حالت څخه د تناقص حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له مثبت څخه منفي ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اعظمي(maximum) په نامه یادېږي.

2- **اصغري ټکی**: که چېرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تناقص له حالت څخه تزاید حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له منفي څخه مثبت ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اصغري (minimum) په نامه یادېږي.

3- **د انعطاف ټکی**: که چېرې مشتق خپله اشاره د x_0 په یوه معین ټکي کې له مثبت څخه صفر ته او بیا مثبت ته یا له منفي څخه صفر او بیا منفي ته بدله کړي x_0 د انعطاف د نقطې *Inflection Point* په نامه یادېږي.

لومړی مثال: د $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x$ تابع راکړل شوی ده دا تابع څو د (Extreme) ټکي لري.

حل: د تابع لومړی مشتق پیدا کوو بیا هغه مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمتونه په لاس راوړو.

$$f'_{(x)}=3x^2-7x+2$$

$$f'(x)=0$$

$$3x-1=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$$

$$x-2=0\Rightarrow x_2=2$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{17}{54}$	↘	-2	↘	-2	↗ $+\infty$
		Max				*Min*	

په پایله کې ویلای شو چې اصلي تابع دریمه درجه ده، نو د $f(x)$ د تابع مشتق د $(\frac{1}{3})$ او (2) په دوو نقطو کې خپله علامه بدلوي، نو دوه بحراني(Extreme) ټکي لري.

دویم مثال: د $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع موضعي Extreme ټکي یا نسبتي ټکي مشخص کړئ.

حل: لومړی د تابع مشتق په لاس راوړو، وروسته یې علامې ټاکو:

لیدل کېږي چې تابع د $y=\frac{u}{v}$ شکل لري، نو $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

دیوه کسر قیمت هغه وخت له صفر سره مساوي دی چې د تابع صورت مساوي له صفر سره وي.

$$f'(x)=0\quad\Rightarrow\quad -x^2-2x+2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=12$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{-2}=-2.73$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{-2}=0.73$$

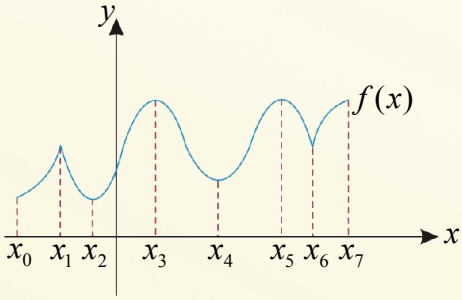
x		-3		-2.73		-1		0.73		1	
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{15}$	↘	*Min*	↗	0	↗	*Max*	↘	-2	↘

په جدول کې ښکاري چې f' د x_1 او x_2 دواړو خواوو ته خپله علامه بدلوي، نو تابع دوه بحراني Extreme ټکي لري، یعنې تابع اعظمي او اصغري ټکي لري.

مطلق اعظمي او مطلق اصغري ټکي Absolute Maximum & Absolute Minimum

کېدای شي یوه تابع په یوه انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي ولري، خو په یوه ټاکلي انټروال کې تابع یوازې یوه مطلقه اعظمي او یوه مطلقه اصغري نقطه لري. په شکل کې یې وښیئ؟

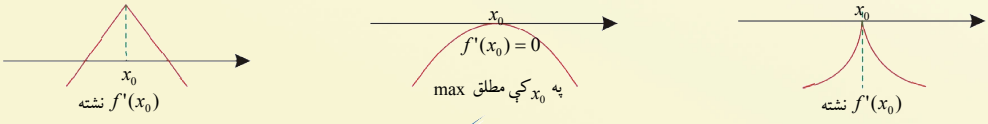
لاندینی شکل ته ځیر شي:



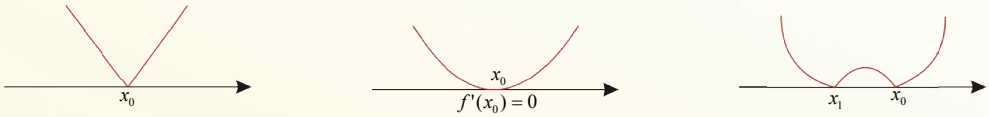
- د $f(x)$ په تابع کې اعظمي او اصغري ټکي وښیئ.
- د $f(x)$ تابع بحراني ټکي په ګوته کړئ.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي لري.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو اصغري او اعظمي لري.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

مطلق اعظمي Absolute Maximum: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ ټکی مطلق اعظمي بلل کېږي، که چېرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلق اعظمي وایي لاندې شکلونه وګورئ.



مطلق اصغري Absolute Minimum: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې د f د تعريف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي، نو په دې حالت کې $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وايي، د x هغه قيمتونه چې د هغوی لپاره تابع يا اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د x دغه قيمتونه د Extreme په نامه يادېږي.

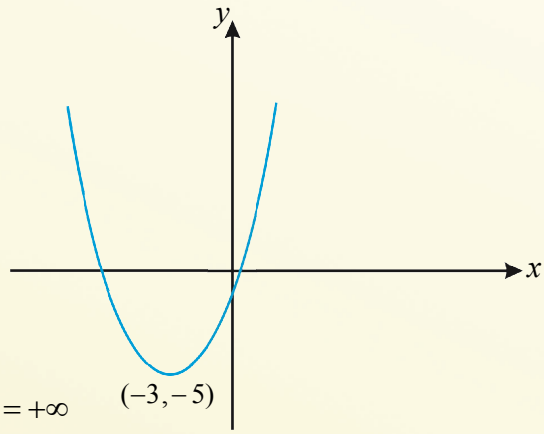


نشته $f'(x_0)$ — په x_0 کې مطلق min — نشته $f'(x_1)$ او $f'(x_0)$

لومړی مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ د تابع مطلق اصغري پيداکړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع مشتق نيسو او د مشتق د تابع حلونه په لاس راوړو:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$
$$f'(x) = x + 3$$
$$f'(x) = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$
$$f(-3) = -5$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right) = +\infty$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} x^2 + 3\lim_{x\to\infty} x - 1\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{2} = +\infty$$



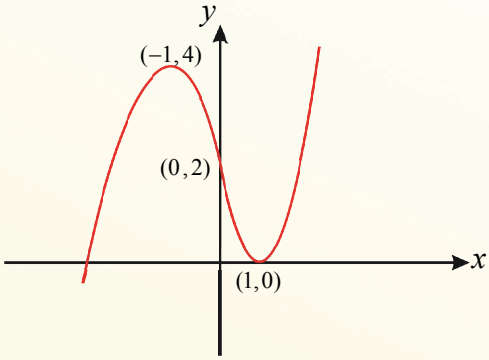
x	$-\infty$		-4		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{2}$	↘	-5	↗	3	↗	$\frac{15}{2}$	↗	$+\infty$
					Min						

په پايله کې د $x = -3$ په ټکي کې چې د تابع قيمت (-5) دی او تابع په $(-3, -5)$ ټکي کې مطلق اصغري لري.

دویم مثال: د $f(x)=x^3-3x+2$ د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیدا او رسم یې کړئ.

حل: د اعظمي او اصغري ټکو د پیدا کولو لپاره لومړی د تابع لومړی مشتق پیدا او بیا د مشتق د تابع صفري ټکي په لاس راوړو.

$$f(x)=x^3-3x+2$$
$$f'(x)=3x^2-3$$
$$f'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x^2=1$$
$$x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$$
$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2$$
$$=-1+3+2$$
$$=4$$
$$f(1)=1^3-3\cdot 1+2=1-3+2=0$$
$$f(0)=0-3\cdot 0+2=2$$
$$f(2)=2^3-3\cdot 2+2=4$$
$$f(1)=0 \quad , \quad f(0)=2 \quad , \quad f(-1)=4$$
$$Max\ f(-1)=4 \qquad Min\ f(1)=0$$



x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{5}{6}$	↗	4	↘	2	↘	0	↗	4	↗	$+\infty$
					Max				Min				

له جدول څخه لیدل کېږي چې تابع د $(-\infty,-1)$ او $(1,+\infty)$ په انټروالونو کې متزایده او $(-1,1)$ په انټروال کې متناقصه ده، نو د $(1,0)$ نقطې اصغري او د $(-1,4)$ نقطه اعظمي ده.

د یوې تابع د ګراف رسموولو لپاره لاندې ټکي باید په پام کې ونیسو:

1. د تابع متمادیت او نامتمادیت مطالعه کړو.
2. د قایمو محوراتو سره د ګراف تقاطع.
3. د لومړي مشتق د اشارې مطالعه د تابع د تزاید او تناقص لپاره.
4. د تابع د اعظمي او اصغري ټکو لپاره د مشتق صفري ټکي پیدا کول.
5. د مجانبونو ټاکل.
6. د جدول ترتیبول او د هغوی په مرسته د ګراف رسمول.

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ تابع گراف رسم کړئ؟

حل: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوي ده.

1- ددې تابع د تقاطع ټکی د x او y له محورونو سره پیداکوو:

د y له محور سره د گراف تقاطع د ټکو د پیداکولو لپاره په ورکړشوي تابع کې $x = 0$ وضع کوو:

$$x = 0 \qquad y = 2 + 0 - 0 = 2$$

نو پورتنی گراف د y محور په $(0,2)$ نقطه کې قطع کوي.

د x د محور سره دگراف د تقاطع د ټکو دپیدا کولو لپاره y مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمت پیداکوو:

$$y = 0 \ , \ 2 + x - x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = -\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2$$

نو پورتنی گراف د x محور په $(-1,0)$ او $(2,0)$ نقطو کې قطع کوي.

2- د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیداکوو، ددې کار لپاره دتابع اول او دویم مشتق څېړو.

$$y = 2 + x - x^2$$

څرنگه چې د تابع په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع لومړی مشتق صفر دی نو $y' = 0$ سره وضع کوو:

$$y' = 1 - 2x$$

$$y' = 0 \text{ ، } \quad 1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \ \Rightarrow \ 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

تابع په $x = \frac{1}{2}$ نقطه کې یو اعظمي یو یا اصغري قیمت لري، دهغې دپیژندنې له پاره دتابع دویم مشتق په $x = \frac{1}{2}$ ټکو کې څېړو:

$$y'' = -2 < 0$$

څرنګه چې y'' تل منفي دی، نو په $x=\frac{1}{2}$ کې هم منفي دی، ځکه نو تابع په $x=\frac{1}{2}$ ټکی کې یو اعظمي قیمت لري څرنګه چې د $x=\frac{1}{2}$ لپاره $y=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}$ کېږي، نو د تابع اعظمي نقطه داده:

$$(\frac{1}{2}، 2\frac{1}{4})$$

دامنحني دانعطاف نقطه نه لري، ځکه چې دهر x لپاره $y''<0$ دی.

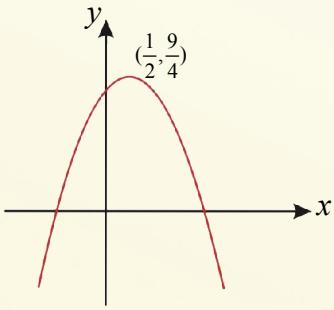
3- په $\pm\infty$ کې دګراف څېړل:

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}(2+x-x^2)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}(2+x-x^2)=-\infty$$

د زیاتې روښانتیا لپاره لاندې جدول ترتیب شوی، او د تابع ټول بدلونو نه په هغو کې په ګوته کوو او وروسته نوموړی ګراف رسموو.

x		-1		$\frac{1}{2}$		2	
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	↗	0	↗	$2\frac{1}{4}$	↘	0	↘



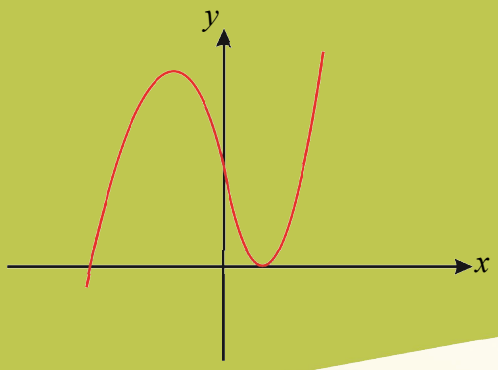
پوښتنې

1- د لاندې توابعو موضعي Extreme ټکی و ټاکئ.

$a)\ f(x)=x^2-3x+2$ $\qquad b)\ f(x)=\frac{x+1}{x^2}$ $\qquad c)\ y=3x^2-4x+1$

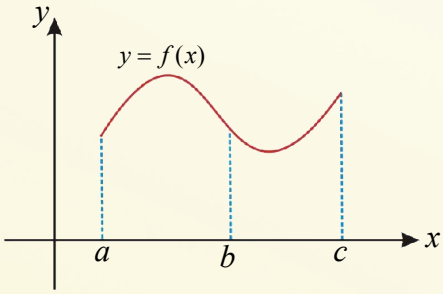
2- د $f(x)=3x^3-4x^2$ د تابع مطلقه min پیدا کړئ.

د انعطاف د نقطې ټاکل



هغه ټکي چې د یوې تابع ګراف په هغې کې خپل محدبیت، مقعریت ته او یا ددې پر عکس بدلوي د څه په نامه یادېږي؟ آیا په دې ټکي کې د دویم مشتق علامه او قیمت څېړلای شئ؟

لاندینی شکل په پام کې ونیسئ.

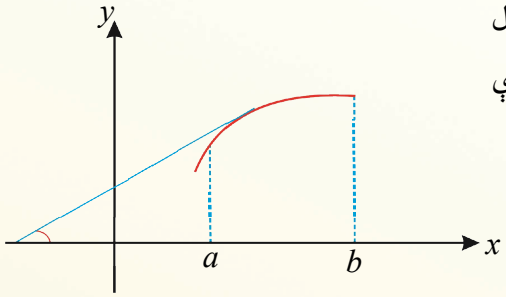


- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (a,b) په انتروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (b,c) په انتروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د (a,b) په انتروال کې په منحني یو مماس رسم کړئ او له هغه مماس سره یې پرتله کړئ چې د (b,c) په انتروال کې په منحني رسمېږي.

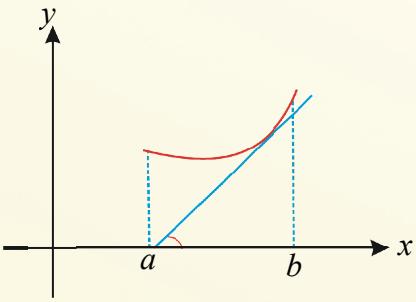
د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

1. د $y = f(x)$ تابع منحني په یوه انتروال کې پرسیدلی یا محدب بلل کېږي، که چېرې په دې انتروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني له پاسه یا پورته خواته پروت وي، په دې صورت کې د تابع دویم مشتق منفي $y''<0$ په لاس راځي.

په دې ډول که د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې منفي وي، نو د تابع ګراف یا منحني په دې انتروال کې محدب پاتې کېږي.



2. د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انتروال کې ننوتې یا مقعره بلل کېږي، که چېرې په نوموړي انتروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس له منحني څخه لاندې یا ښکته خوا پروت وي، که د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انتروال په ټولو ټکو کې مثبت $y''>0$ وي، منحني په دې انتروال کې مقعره بلل کېږي.



تعریف: هغه نقطه چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا ددې پر عکس جهت بدلوي، او لومړی مشتق یې موجود او دویم مشتق یې صفر شي د انعطاف (Inflection) نقطه بلل کېږي.

که د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ټکي کې چې د تابع دویم مشتق صفر شي ($f''(x_0)=0$) وي تابع د $x = x_0$ په ټکي کې د انعطاف نقطه لري او ددې برعکس تابع د انعطاف نقطه نه لري.

لومړی مثال: د $f(x) = x^2 - 5x + 4$ د تابع ګراف رسم محدبیت او مقعریت یې وڅېړئ.

حل: تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوي ده.

1- د y له محورسره تقاطع

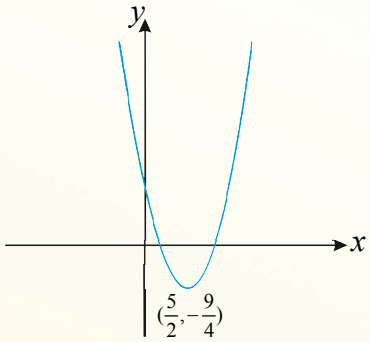
$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,4)$$

2- د x له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1) \Rightarrow x_1 = 4 \quad , \quad x_2 = 1$$

د x له محور سره د تقاطع ټکي $(4,0)$ او $(1,0)$ دي.

x	$-\infty$		0		1		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$ min	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



د ګراف، مقعریت او محدبیت د څېړلو لپاره د تابع دویم مشتق په لاس راوړو:

$$f(x)=x^2-5x+4 \quad \Rightarrow \quad y'=2x-5$$
$$f''(x)=2>0$$

څرنګه چې $y''>0$ دی، نو په پایله کې ویلای شو چې منحني ننوتې یا مقعره ده.

دویم مثال: هغه انټروالونه وټاکئ چې په هغې کې د $y=x^3+9x^2-6x+1$ تابع ګراف محدب یا مقعر وي.

حل:

$$y=x^3+9x^2-6x+1$$
$$y'=3x^2+18x-6 \quad \Rightarrow \quad y''=6x+18$$
$$y''<0 \quad \Rightarrow \quad 6x+18<0$$
$$6x<-18 \quad \Rightarrow \quad x<-3$$
$$y''>0 \quad \Rightarrow \quad 6x+18>0$$
$$6x>-18$$
$$x>-3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$		$\cup$
	مقعر	انعطاف	محدب

څرنګه چې لیدل کېږي د تابع دویم مشتق په $(-\infty,-3)$ انټروال کې منفي او د $(-3,+\infty)$ انټروال کې مثبت دي، نو دا ډول ګراف په لومړی انتروال کې محدب او په دویم کې مقعر دی.

دریم مثال: د $f(x)=x^5-5x^3$ د تابع د انعطاف ټکی و ټاکئ؟

حل:

$$f(x)=x^5-5x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=5x^4-15x^2$$

$$f''(x)=20x^3-30x$$

$$f''(x)=0$$

$$20x^3-30x=0$$

$$x(20x^2-30)=0$$

$$x_1=0$$

$$20x^2-30=0$$

$$x^2=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$	-13.65	$\cup$		$\cap$	$-6\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cup$	

لیدل کېږي چې په $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ او $x=0$, $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ کې د تابع دویم مشتق صفر دی یا $f''(x)=0$ علامه بدلوي او په دې ټکو کې مماس رسمیدلی شي چې هغه ټکی د انعطاف ټکی دی.

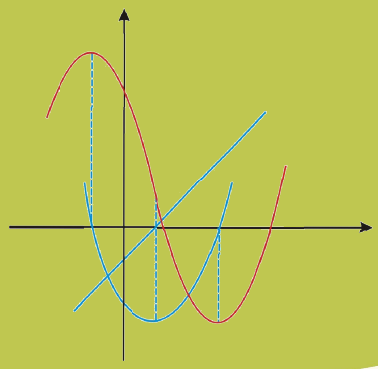
پوښتنې

1. د $f(x)=x^2-4$ د تابع محدبیت او مقعریت وټاکئ.
2. د $f(x)=-2x^2-1$ د تابع د انعطاف نقطه وټاکئ.

د منحني‌گانو رسمول

د دویمې درجې تابع گانو گراف

د مخامخ شکل په اړه خپل نظر بیان کړئ.



- د $f(x)=x+1$ د تابع گراف د $f(x)=-x+1$ د تابع له گراف سره پرتله کړئ.
- د $y=ax^2+bx+c$ د تابع د تعریف ساحه و ټاکئ آیا دا تابع متمادي ده؟
- د نوموړی تابع لومړی مشتق پیدا او د Maximum او Minimum ټکي او د تناظر محور یې وټاکئ.
- د تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x \to \pm\infty$ وکړي.
- له محورونو سره د تقاطع ټکي و ټاکئ.
- د تحولاتو جدول ترتیب او نوموړی منحني رسم کړئ.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

1- د تابع د تعریف ساحه: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوی ده، یعنې:

$$D_f \to (-\infty, +\infty)$$

نو تابع د خپل تعریف په ساحه کې متمادي ده.

2- د تابع د بحراني ټکو او د تناظر محور ټاکل:

$$f'(x)=2ax+b=0$$
$$f'(x)=0$$
$$2ax+b=0$$
$$2ax=-b$$
$$x=\frac{-b}{2a}$$

د $x=\frac{-b}{2a}$ قیمت په اصل تابع کې وضع کوو:

$$y=a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})+c \Rightarrow a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=0$$

$$y=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a} \Rightarrow \frac{4ac-b^2}{4a}$$

د $(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکی بحراني یعنې اعظمي یا اصغري دی.

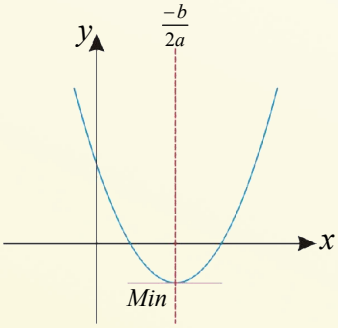
الف: که $a>0$ وي، نو: $a>0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Min لري.

ب: که $a<0$ وي، نو: $a<0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Max لري.

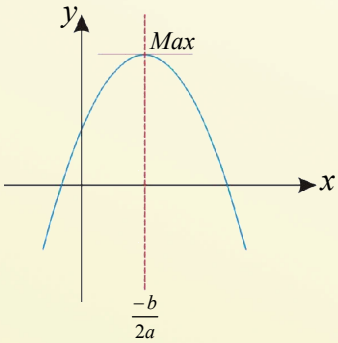
3- د ګراف د رسمولو لپاره جدول ترتیب او ګراف یې رسموو:



$a>0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	$+\infty$

څرنګه چې $a>0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اصغري نقطه ده.



$a<0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$+$		$-$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↘	$-\infty$

څرنګه چې $a<0$ د منحني خوله(جهت) ښکته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اعظمي نقطه ده.

لومړی مثال: د $f(x)=x^2-4x+3$ د تابع تحولات مطالعه او گراف يې رسم کړئ.

حل:

1- د تابع د تعريف ساحه $(-\infty,+\infty)$ تابع د ټولو حقيقي قيمتونو لپاره تعريف شوي ده، نو تابع په دې انتروال کې متمادي ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-4x+3=0 \\ (x-1)(x-3)=0 \\ x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \\ x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=3 \end{array}\right\} \quad (1,0) \quad , \quad (3,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0-4\cdot 0+3 \\ y=3 \end{array}\right\} \quad (0,3)$$

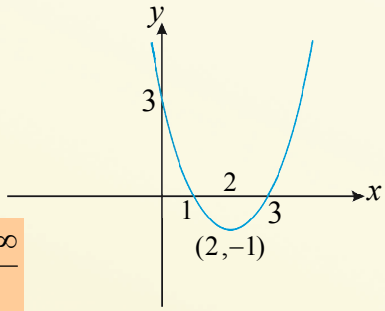
4- د تابع د extreme ټکو د پيدا کولو لپاره د لومړي مشتق صفري ټکي پيدا او جدول يې ترتيبوو:

$$f'(x)=2x-4=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=4 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad V(2,-1)\min$$

$$x\to\pm\infty \quad \Rightarrow \quad f(x)\to\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2-4x+3\right]=+\infty$$



x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	↘	3	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$
							Min				

دويم مثال: د $f(x)=-x^2+2x$ د تابع تحولات مطالعه او گراف يې رسم کړئ.

حل: ليدل کېږي چې تابع د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوي ده، نو:

1- د تابع د تعريف ساحه عبارت ده له: $(-\infty,+\infty)$ چې په دې ساحه کې تابع متمادي ده.

2- د تابع د منحني د تقاطع ټکی د x له محور سره:

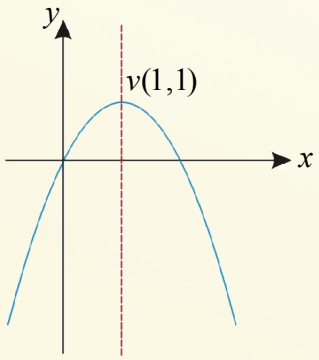
$$f(x)=0$$
$$-x^2+2x=0$$
$$x(-x+2)=0$$
د تقاطع ټکی
$$x_1=0 \qquad (0,0)$$
$$-x+2=0$$
$$x_2=2 \qquad (2,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$x=0$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f(x)=0+2\cdot 0$$
$$f(x)=0 \qquad (0,0)$$

4- د تابع د extreme نقطو د پیدا کولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیدا کوو او جدول یې ترتیب او گراف یې رسموو:

$$D_f \to (-\infty,+\infty)$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f'(x)=-2x+2=0$$
$$-2x+2=0$$
$$-2x=-2$$
$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow V(1,1)Max$$



x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+		−		−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗	1 (Max)	↘	0	↘ $-\infty$

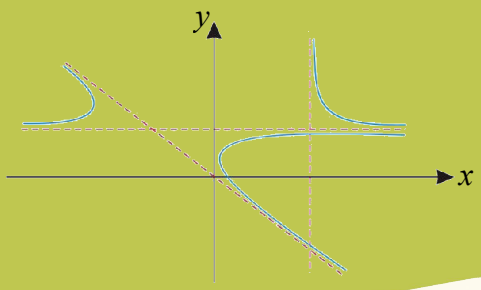
په جدول کې لیدل کېږي چې د مشتق علامه د مثبت څخه منفي ته او یا د تزاید حالت څخه تناقص ته شکل بدلوي، نو تابع د $(1,1)$ په ټکي کې اعظمي ده.

پوښتنې

1. د $f(x)=2x^2-x-1$ د تابع گراف رسم کړئ.
2. د $f(x)=x^2-x-2$ د تابع د گراف بدلونونه وڅېړئ او گراف یې رسم کړئ.

د توابعو د ګرافونو مجانبونه

شکل ته پام وکړئ ټکی ټکی کرښې د څه په نامه یادېږي، نومونه یې واخلئ.

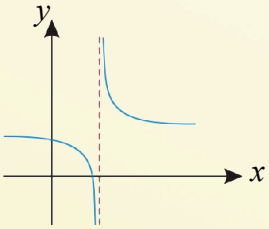


- مجانبونه څه ډول کرښې دي؟
- مجانبونه، منحنيګانې په کومو ټکو کې قطع کوي؟

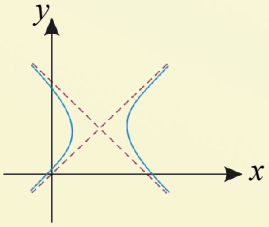
د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

مجانبونه: هغه مستقیمې کرښې دي چې د منحني د ګراف لپاره د لارښود حیثیت لري او د منحني کرښه قطع کړي، هغه تابع ګانې چې د متحول د ځینو قیمتونو لپاره غیر متمادي وي، مجانبونه لري او په درې ډوله دي.

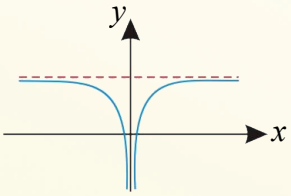
1- **عمودي مجانب**: د $y = f(x)$ تابع عمودي مجانب لري چې $x \to a$ او $y \to \infty$ وکړي، یعنې $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ شي یا په بل عبارت په کسري تابع ګانو کې که چېرې د کسر مخرج مساوي په صفر شي، نوموړی تابع بې‌نهایت خوا ته تقرب کوي، نو ددې ډول مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج له صفر سره مساوي وضع کوو.



2- **مایل مجانب**: د $y = f(x)$ کسري تابع کله چې د صورت او مخرج د تقسیم حاصل د یوه مستقیم خط په شکل ($y = ax + b$) لاسته راشي داسې چې $a \neq 0$ وي په لاس راځي او دا هغه وخت امکان لري چې تابع د مایل مجانب لرونکی وي، یعنې د متحول د صورت درجه د متحول د مخرج له درجې څخه د یو واحد په اندازه لوړه وي.



په یاد ولرئ چې که یوه تابع د افقي مجانب لرونکي وي، مایل مجانب نه لري او بر عکس که چېرې مایل مجانب ولري افقي مجانب نه لري.



3- **افقي مجانب**: یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې که $x \to \pm\infty$ وکړي د تابع قیمت یو ثابت مقدار شي او یا په بل عبارت یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې که $x \to \pm\infty$ وکړي، نو $y \to c$ ته تقرب کوي، یعنې $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = c$ شي.

لومړی مثال: د $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-4}$ تابع عمودي او افقي مجانب پیدا کړئ.

حل: د عمودي مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج مساوي په صفر وضع کوو، لرو چې:

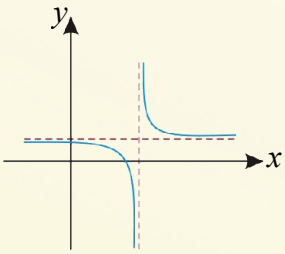
$$2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

نو $x=2$ د تابع عمودي مجانب دی.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{2x-4}\right) = \frac{1}{2}$$

افقي مجانب عبارت دی له: $y = \dfrac{1}{2}$

x	-1	0	$+1$
y	0	$-\dfrac{1}{4}$	-1



دویم مثال: د $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$ تابع د منحني مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- مایل مجانب: ددې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع صورت د تابع پر مخرج وېشو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2-\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y = x+2$$

2- عمودي مجانب: د دې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} \quad \Rightarrow \quad x=0$$

3- افقي مجانب: څرنګه چې تابع مایل مجانب لري، نو افقي مجانب نه لري.

دریم مثال: د $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- عمودي مجانب: د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ x_1=-1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x-2=0 \\ x_2=2 \end{array}$$

نو $x=2$ او $x=-1$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

2- افقي مجانب: د افقي مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع لیمیټ په لاس راوړو:

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=1$$

نو $y=1$ د تابع افقي مجانب دی.

3- څرنګه چې تابع افقي مجانب لري، نو مایل مجانب نه لري.

د مجانبونو د ټاکلو عمومي طریقه:

که چېرې د $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ په ناطقه تابع کې m او n په ترتیب سره د صورت او مخرج درجې وي، نو:

الف: که $m<n$ وي، نو د x محور افقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي، نو $y=b$ افقي مجانب دی، داسې چې b د m او n د درجو د حدودو د ضریبونو نسبت دی.

ج: که چېرې $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري، ولې د مایل مجانب احتمال یې شته.

د: که چېرې $m=n+1$ وي(که د صورت درجه د یوه واحد په اندازه له مخرج څخه لویه وي) تابع هرو مرو مایل مجانب لري، په دې حالت کې افقي مجانب نه لري.

پوښتنې

د لاندې توابعو مجانبونه وټاکئ.

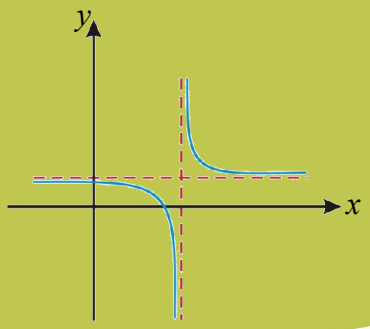
1) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$

2) $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

3) $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$

د هوموگرافیک تابع گانو گراف

شکل ته پاملرنه وکړئ دا شکل د څه ډول تابع گراف دی؟ افقي او عمودي مجانبونه یې وښیئ.



- هوموگرافیک تابع څه ډول تابع ده، په یوه مثال کې یې واضح کړئ.
- د $y=\frac{1}{x}$ د تابع گراف رسم کړئ.
- د نوموړي تابع مجانبونه لومړی پیدا او بیا یې رسم کړئ.
- د تابع د گراف تقاطع د x او y له محورونو سره پیدا کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

هغه تابعگانې چې د $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ شکل ولري، هوموگرافیک تابع گانې بلل کېږي، داسې چې $c\neq 0$ وي. دا ډول توابع دوه مجانبونه لري چې:

1- افقي مجانب یې:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\frac{cx}{x}+\frac{d}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} \Rightarrow y=\frac{a}{c}$$

2- عمودي(قایم) مجانب یې:

$$cx+d=0 \Rightarrow cx=-d \Rightarrow x=-\frac{d}{c}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$ د تابع بدلونونه وڅېړئ او گراف یې رسم کړئ.

حل:

$$x-3=0$$
$$x=3$$

1. څرنگه چې د تابع مخرج د $x=3$ په قیمت کې صفر کېږي، نو تابع پرته له $x=3$ څخه د متحول په ټولو قیمتونو کې معینه ده، یعنې د تابع د تعریف ساحه ټاکو: $Domain=IR\setminus\{3\}$

2. د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=0 \\ 2x-1=0 \\ 2x=1 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \left(\frac{1}{2},0\right)$$

3. د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$x=0 \;\Rightarrow\; f(0)=\frac{2\cdot 0-1}{0-3}=\frac{1}{3} \qquad \Big\} \left(0,\frac{1}{3}\right)$$

4. د مجانبونو ټاکل:

الف- افقي مجانب: $y=2$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{x-3}=2$ یا $f(x)=\dfrac{a}{c}=\dfrac{2}{1}=2$

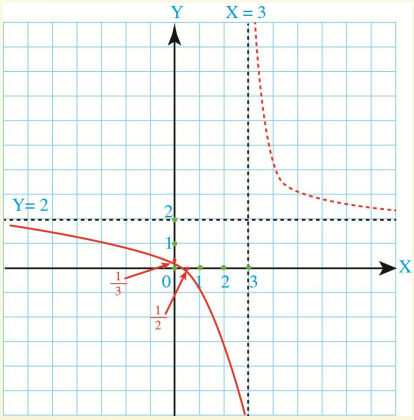
ب- عمودي مجانب: $x-3=0 \;\Rightarrow\; x=3$ یا $x=-\dfrac{d}{c}=-\dfrac{-3}{1}=3$

5. د تابع د extreme ټکي پیدا کوو او جدول یې ترتیب او گراف یې رسموو:

$$f'(x)=\frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}<0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x-3)^2-(-5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10}{(x-3)^3}$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	2 ↘ $-\infty$	نه دی تعریف شوی	$+\infty$ ↘ 2



دویم مثال: د $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ د تابع د گراف بدلونونه و څېړئ او گراف یې رسم کړئ.

حل: $x+1=0 \;\Rightarrow\; x=-1$

1- د تابع د تعریف ساحه $D_f \to IR\setminus\{-1\}$ یعني تابع په $x=-1$ ټکي کې تعریف شوې نه ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره: $y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره: $x=0 \Rightarrow y=\frac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

4- د مجانبونو ټاکل:

الف- عمودي مجانب: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

ب- افقي مجانب: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x)=y=1$

5- د تابع extreme نقطې پیدا کوو، جدول یې ترتیب او گراف یې رسموو:

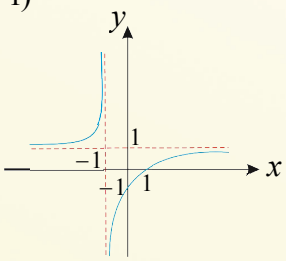
$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x+1)^2-2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$	
$f'(x)$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 1$

له ځای تعریف شوی



دریم مثال: غواړو د $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ تابع گراف رسم کړو.

حل:

1- د تابع د تعریف ساحه تر څېړنې لاندې نیسو لیدل کېږي چې تابع پرته له $x=0$ څخه نور د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده، یعنې: $D_f \to IR\setminus\{0\}$

2- د محوراتو سره د تقاطع ټکي

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5=0 \\ 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (2.5,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع: د $x=0$ لپاره د $f(x)$ تابع تعریف شوي نه ده، نو له y محور سره تقاطع نه لري.

3- **مجانبونه**:

الف- عمودي مجانب: څرنګه چې په مخرج کې یوازې x موجود دی، نو $x=0$ یې عمودي مجانب دی چې د y محور کېږي.

ب- افقي مجانب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{2x-5}{x}\right]=2$ نو $y=2$ د تابع افقي مجانب دی.

4- د بحراني ټکو پیدا کول: د بحراني ټکو د پیدا کولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیدا کوو

$$f(x)=\frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot x-(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}$$

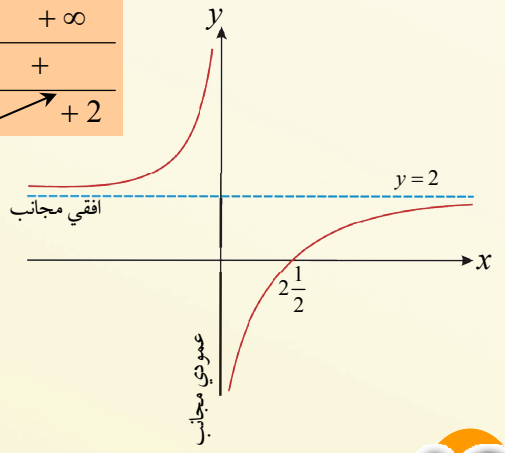
$$f'(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

څرنګه چې $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزایده ده.

د ګراف د رسمولو لپاره د تابع تحولات په جدول کې ترتیبوو:

x	$-\infty$		0		2.5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$	$-\infty$	0	↗	$+2$

نه دی تعریف شوی

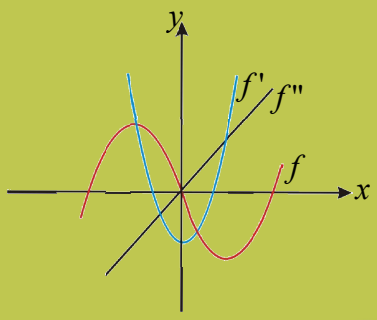


پوښتنې

1. د $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.
2. د $f(x)=\dfrac{x}{x-4}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

د دریمې درجې یو مجهوله تابع گراف $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ ، \ a \neq 0$

مخامخ شکل د ځینو توابعو گرافونه راښیي تاسې د هرې تابع د گراف په هکله خپل نظر بیان کړئ.



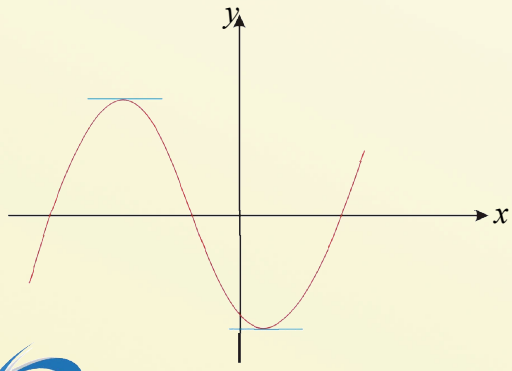
- د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع په اړه فکر وکړئ او ووایئ چې تابع څومه درجه تابع ده؟
- د نوموړي تابع ضریبونه او ثابت حد ولیکئ.
- د نوموړي تابع دویم مشتق پیدا کړئ.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

1. د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، په دریمه درجه تابع کې چې $a > 0$ وي داسې په پام کې نیسو. که چېرې د تابع لومړی مشتق پیدا کړو دویمه درجه تابع په لاس راځي، نو د $f'(x) = 0$ لپاره د دویمې درجې د معادلې حل په پام کې نیسو او Δ یې مطالعه کوو که چېرې د معادلې Δ له صفر څخه لوی $(\Delta f' > 0)$ وي، نو معادله(د تابع مشتق) دوه حله لري، که چېرې $a > 0$ وي منحني له کیڼ لوري څخه ښي لوري ته یوه نسبي اعظمي نقطه (Local Maximum) او یوه نسبي اصغري (Local Minimum) لري.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f' > 0$$

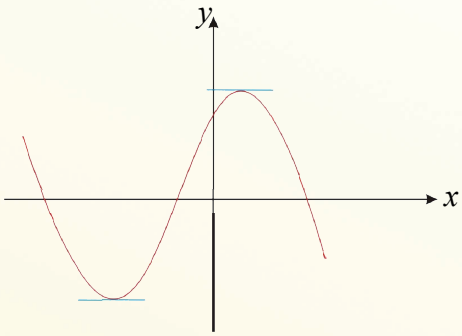
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$



2. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، په تابع کې که $a<0$ ، $f'(x)=0$ او $\Delta f'(x)>0$ معادله دوه جذرونه لري، که چېرې $\Delta f'>0$ نو منحني له کېنې لوري څخه ښی لوري ته یوه نسبي اصغری(Local Minimum) او یوه نسبي اعظمي(Local Minimum) نقطه لري.

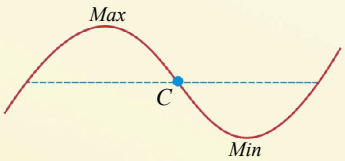
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$a<0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f'>0$$

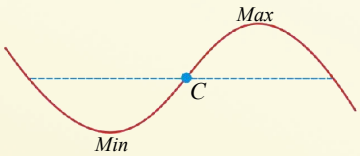
x		x_1		x_2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘		↗		↘ $-\infty$



3. که د دریمې درجې تابع منحني نسبي بحراني Extreme ولري، د Extreme دټکو د منځني ټکي یا د انعطاف د نقطې مختصات یې:

$$I(x_c,y_c)=\left(\frac{x_{\max}+x_{\min}}{2},\frac{y_{\max}+y_{\min}}{2}\right)$$



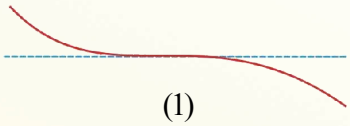


4. د دریمې درجې تابع د تناظر ټکی د تابع د انعطاف ټکی:

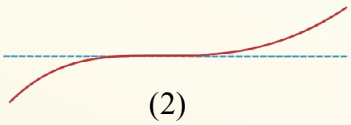
$$f'(x)=0$$
$$3ax^2+2bx+c=0$$

چې د تناظر ټکي یې وروسته د نوموړي معادلې له حل څخه د تناظر مرکز $x=-\frac{b}{3a}$ په لاس راځي.

5. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ په تابع کې که $a<0$ وي او له $f'(x)=0$ سره وضع شي او $\Delta f'(x)=0$ نو معادله یو یا دوه مساوي جذرونه لري په هغه صورت کې چې $f'(x)\le 0$ وي، نو په دې صورت تابع، متناقصه ده او که چېرې $f'(x)\ge 0$ وي، نو په دې صورت کې تابع متزایده ده.



(1)



(2)

لومړی مثال: د $f(x)=(x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات وڅېړئ او گراف یې رسم کړئ.

حل: لومړی د تابع Extreme ټکو مختصات په لاس راوړو، وروسته د لومړي مشتق په مرسته گورو چې تابع په کومه برخه کې متزایده او په کومه برخه کې متناقصه ده. له محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو او د اعظمي او اصغري نقطو د تشخیص او د انعطاف نقطو د پیدا کولو لپاره د تابع دویم مشتق په کار وړو د تحولاتو جدول یې ترتیبوو او بیا یې گراف رسموو: $f(x)=x^3+3x^2-4$

$$f'(x)=3x^2+6x$$
$$3x^2+6x=0$$
$$x(3x+6)=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad 3x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-2$$
$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad , \quad x_2=-2$$
$$f(0)=0^3+3\cdot 0^2-4=-4$$
$$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4$$
$$=-8+12-4=0$$
$$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 6x+6=0$$
$$6x=-6$$
$$x=-1$$

د انعطاف د نقطې د لاسته راوړلو لپاره $x=-1$ په اصلي تابع کې وضع کوو چې د $f(x)$ قیمت لاسته راځي:

$$f(-1)=(-1-1)(-1+2)^2=-2$$

د انعطاف ټکی: $I(-1,-2)$

له محورونو سره تقاطع:

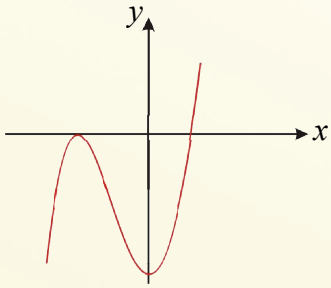
الف- د x له محور سره تقاطع:

$$y=0$$
$$(x-1)(x+2)^2=0$$
$$\left.\begin{array}{l} x-1=0 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x_2=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,0)\ ,\ \ (-2,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

$$x=0$$
$$y=0^3+3\cdot 0^2-4=-4 \ \Rightarrow (0,-4)$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$		$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$ $-\infty$	0 max $\searrow$	-2 min $\searrow$	-4 $\nearrow$	$+\infty$



دویم مثال: د $f(x)=-x^3+3x^2$ د تابع تحولات وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: د تابع لومړی مشتق پیدا کوو او وروسته یې صفري نقطې ټاکو او د تابع اعظمي او اصغري نقطې په لاس راوړو.

-1

$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f'(x)=-3x^2+6x$$
$$f'(x)=0 \ \Rightarrow -3x^2+6x=0 \ \Rightarrow x(-3x+6)=0$$
$$x_1=0 \ \ ,\ \ -3x+6=0 \ \Rightarrow -3x=-6 \ \Rightarrow x_2=2$$

اعظمي او اصغري ټکي عبارت دي له:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \\ f(2)=-2^3+3\cdot 2^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\ ,\ \ (2,4)$$

2- محورونو سره تقاطع:

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ -x^3+3x^2=0 \\ x^2(-x+3)=0 \\ x_1=0\ \ ,\ \ -x+3=0 \\ \qquad\qquad\quad x_2=3 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\ \ ,\ \ (3,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)$$

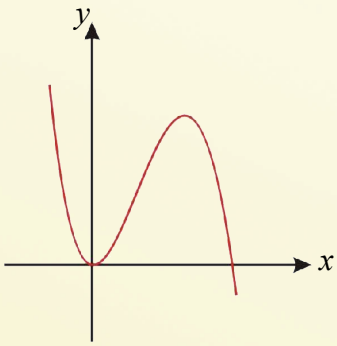
3- د انعطاف د نقطې د پیدا کولو لپاره $f''(x)$ مطالعه کوو:

$$f''(x)=-6x+6=0$$
$$x=1$$
$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f(1)=2 \ \Rightarrow\ I(1,\ 2)$$

4- اوس یې جدول ترتیبوو او گراف یې رسموو:

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$-$
$f''(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗		↗	4	↘ $-\infty$
$f(x)$	∪		∪		∩		∩

نسبي Min نسبي Max



دریم مثال: د $f(x)=x^3-3x^2+x+1$ د تابع د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې د تناظر مرکز د $x=\frac{-b}{3a}$ له رابطې څخه لاسته راځي، نو:

$$x=\frac{-b}{3a}=\frac{-(-3)}{3\cdot 1}=1 \quad \Rightarrow \quad f(1)=1^3-3(1)^2+1+1=0$$

د تناظر د مرکز مختصات $C(1,0)$

پوښتنې

1. د لاندې تابع ګانو د تحولاتو جدول ترتیب او ګرافونه یې رسم کړئ.

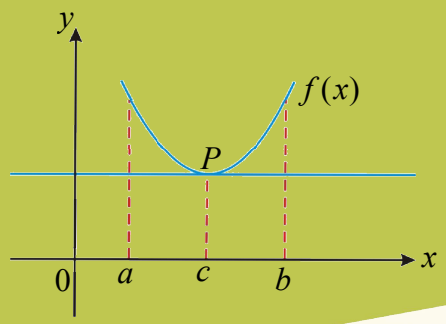
$$a)\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1 \qquad , \qquad b)\ f(x)=-(x-1)^3$$

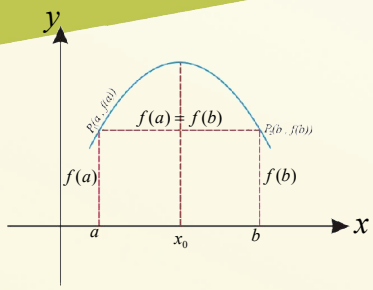
2- د $f(x)=-2x^2+6x-3$ د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

د رول قضیه

Rolle Theorem

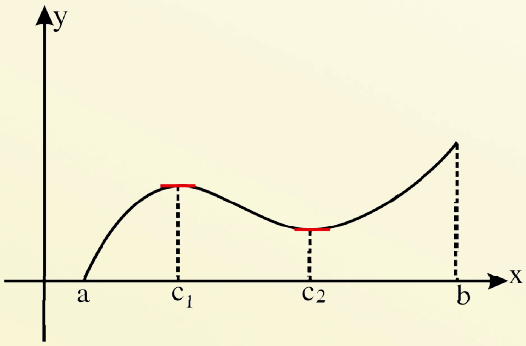
په مخامخ شکل کې د $f(x)$ تابع او د Δ مستقیم خط یو له بل سره څه اړیکې لري او $f'(c)$ له څه سره مساوي دی.





- په مخامخ شکل کې د (a,b) په انتروال کې د $f(x)$ په منحني باندې داسې ټکئ یا ټکي شته چې له هغو څخه په منحني داسې مماس رسم شي چې د x له محور سره موازي وي.
- د $f(x)$ تابع په کوم انټروال کې متمادي او په کومه فاصله کې د مشتق وړده.
- که چېرې $f(a)=f(b)$ وي، نو د x_0 ټکي په (a,b) انتروال کې وخېږئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې قضیه بیانولای شو:



قضیه: که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انتروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a)=f(b)$ وي، نو لږ تر لږه د x_0 یو ټکی په $a < x_0 < b$ انټروال کې شته چې د $f'(x_0)=0$ شي.

ثبوت: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په ورکړل شوی انتروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو بحراني Extreme ټکی لري.

1- که $f(x)=c$ ثابته تابع وي، نو واضح ده چې $f'(x)=0$ ده.

2- که د $f(x)$ تابع ثابته نه وي، او $x_2, x_1 \in (a,b)$ او $f(x_1)>0$ وي، نو تابع په $x_0 \in [a,b]$ کې یو Maximum قیمت لري چې $f(x_0) \geq f(x_1) > 0$ شي او همدا راز که $f(x_2)<0$ وي، نو تابع یو اصغري Minimum قیمت لري.

څرنګه چې په Extreme نقطو کې د تابع مشتق صفر دی، نو $f'(x_0)=0$ کېږي.

لومړی مثال: د رول قضیه د $f(x)=\cos x$ د تابع لپاره په $[a,b]=[\pi,5\pi]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

حل: څرنګه چې $f(\pi)=f(5\pi)=-1$ سره دی، نو د $f(x)$ تابع د هره x لپاره د مشتق وړ ده، نو د $(\pi,5\pi)$ په انتروال کې متمادي او په $(\pi,5\pi)$ په انتروال کې مشتق منونکی ده چې د Rolle د قضیې مطابق په $(\pi,5\pi)$ کې لږ تر لږه یو x_0 موجود دی چې د هغه قیمت لپاره $(\cos x)'=0$ شي. څرنګه چې $(\cos x)'=-\sin x$ دی، نو باید $-\sin x=0$ معادلې لږ تر لږه یو حل په $(\pi,5\pi)$ کې موجود وي. $-\sin x=0 \Rightarrow \sin x=0$ دا معادله په $(\pi,5\pi)$ کې درې ځله $4\pi,3\pi,2\pi$ قیمتونه اخېستلای شي.

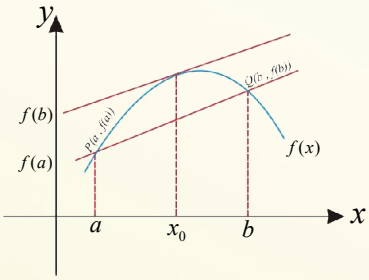
دویم مثال: د رول قضیه د $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ تابع په $[a,b]=[-1,1]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د پیل او پای په ټکو کې د مشتق وړ نه ده، ولې د رول د قضیې د تطبیق وړ ده ځکه $f(-1)=f(1)=0$ دی $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ کې متمادي ده او په $[-1,1]$ کې د x_0 یو عدد شته چې $f'(x_0)=0$ شي او هغه $x_0=0$ دی.

د $y'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$ فورمول څخه په ګټه اخېستنې سره مشتق په لاس راوړو:

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(0)=\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}=0$$

د متوسط قیمت قضیه(لاگرانژقضیه):



مخامخ شکل په پام کې و نیسئ:

- د یوې مستقیمې کرښې میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- د $\overline{PQ}$ د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ.
- د $\overline{PQ}$ د کرښې میل د $f(x)$ د تابع له مشتق سره څه اړیکه لري؟

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیانوو:

قضیه: که چېرې $f(x)$ د $[a,b]$ په فاصله کې متمادي او د (a,b) په فاصله کې د مشتق وړ وي د (a,b) له انټروال څخه د c یو عدد شته دی داسې چې: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

یعنې: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

ثبوت: یوه مرستندویه تابع په پام کې نیسو، لیدل کېږي چې: $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \text{.....} \ \text{I}$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \text{.....} \ \text{II}$$

نو $g(a)=g(b)$ سره دی د رول د قضیې پر بنسټ سره د c عدد د (a,b) انټروال کې شته دی چې $g'(c)=0$ دی، نو:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow g'(x)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \qquad \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

مثال: د $f(x)=2x^3-8x+1$ په تابع کې د متوسط قیمت قضیه په $[a,b]=[1,3]$ کې وڅیړئ.

حل: لیدل کېږي چې د $f(x)$ تابع په $[1,3]$ کې متمادي او په $(1,3)$ کې د مشتق وړ ده، نو د متوسط قیمت له قضیې سره سم په $(1,3)$ کې یو x_0 شته داسې چې:

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{36}{2}=18$$

د c د پیداکولو لپاره لرو: $f'(x_0)=6x^2-8=18 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{26}{6}}$

څرنګه چې $x=\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ کې ګډون لري، نو $x_0=\sqrt{\frac{13}{3}}$ دی.

او $x=-\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ فاصله کې واقع نه ده، نو د قبول وړ نه ده.

پوښتنې

1- که چېرې د $f(x)=\sqrt{x(4-1)}$ تابع د $[0,4]$ په انټروال کې راکړل شوې وي د x_0 قیمت داسې پیدا کړئ چې د رول قضیه په پورتني تابع کې صدق وکړي.

2- که د $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ تابع راکړل شوې وي د x_0 قیمت د $[0,3]$ په فاصله کې داسې وټاکئ چې د رول قضیه په هغې کې صدق وکړي.

3- د هوپیتال قاعده (L' Hopitall)

مخامخ مساوات څه بیانوي؟

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- د $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ د تابع لېمیټ په هغه صورت کی پیدا کړئ چې $x\to 1$ ته تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لېمیټ سره یې پرتله کړئ.
- د $f(x)=\dfrac{3x^4-3x^2-4x-1}{2x^2-4x^3+2x^4}$ د تابع لېمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لېمیټ سره یې پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دا قاعده بیانوو:

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع‌گانې د (a,b) په انتروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چېرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لېمیټ نسبت $x\to a$ قیمت کې د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په $x\to\infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي. په دې حالت کې د تابع د لېمیټ د پیدا کولو لپاره د $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیدا کوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نیولو ته ادامه ورکوو تر څو د ابهام شکل ختم شي د مثال په ډول:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{4x+1}{2x}=\frac{4\cdot 2+1}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}$$

یا

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot 2+5}{2+2}=\frac{9}{4}$$

مثال: د لوپیټال له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره د لاندې توابعو لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-81}{x-3}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}$

لومړی ځواب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x-\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

دویم ځواب:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=\frac{4\cdot 3^3}{1}=108$$

دریم ځواب:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-4}{14x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

پوښتنې

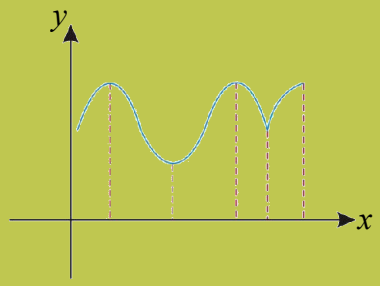
د لوپیټال له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, $b)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$

$c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3}$, $d)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5}{3x^3}$

د بحراني ټکو تطبیق

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی وښیئ او دا ټکی د څه په نامه یادېږي.



مثالونه:

1مثال- دوه عددونه پیدا کړئ چې مجموعه یې 20 او د ضرب حاصل یې لوی ممکن قیمت ولري.

حل: که لومړی عدد ته x وویل شي، نو دویم عدد $20-x$ دی او د ضرب حاصل یې د تابع په شکل داسې: $f(x)=x(20-x)$ لیکو، څرنګه چې د x عدد په $[0,20]$ انتروال کې تحول کوي، نو د تابع مطلق اعظمي قیمت په $[0,20]$ کې لټوو:

$$f(x)=20x-x^2$$
$$f'(x)=0$$
$$20-2x=0$$
$$-2x=-20$$
$$x=10$$
$$f(10)=20\cdot 10-10^2=200-100=100$$
$$f(0)=20\cdot 0-0^2=0$$
$$f(20)=20\cdot 20-20^2=400-400=0$$

لیدل کېږي چې (100 ، 10) د تابع اعظمي نقطه ده، نو مطلوب عددونه $x_1=10$ او $x_2=10$ چې د ضرب حاصل یې 100 دی.

2 مثال- د یوه خوځنده جسم د حرکت معادله د $x=(t-2)(t-3)$ په بڼه راکړل شوې ده، د جسم متوسط سرعت د $t_1=3$ او $t_2=4$ د وخت په واټنو کې پیدا کړئ.

حل: د منځني سرعت د تعریف په مرسته لیکلای شو چې:

$$\text{منځنی سرعت}=\frac{x_{(t_2)}-x_{(t_1)}}{t_2-t_1}=\frac{x_{(4)}-x_{(3)}}{4-3}=\frac{2-0}{4-3}=2$$

3مثال- د کرې د حجم او سطحې د مشتقونو تر منځ منځنی نسبت پیدا کړئ.

حل:

$$\text{د کرې حجم} = v_{(x)} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$\text{د کرې مساحت} = S_{(x)} = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}x$$

4مثال- د سانتي گراد(C) او فارنهایت (F) د حرارت تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ اړیکه شته، تاسې د (C) او (F) تر منځ منځنی نسبت وټاکئ.

حل: د منځنی سرعت د تعریف $(V_m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x})$ په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F)-C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32)-\frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5مثال- یوه ځمکه چې مستطیلي شکل لري، محیط یې $200m$ دی، کېدای شي اعظمي Maximum مساحت یې پیدا کړئ.

حل: په ورکړل شوي محیط سره کولای شو، ډېر مستطیلونه رسم کړو، ولې شرط دا دی چې هغه مستطیل زموږ مطلوب دی چې مساحت یې تر ټولو زیات وي، نو که د مستطیل اوږدوالی په x او سور یې په y وښیو، نو لیکلای شو:

$$\text{محیط} = 2x + 2y = 200$$

$$\text{محیط} = x + y = 100 \quad \Rightarrow y = 100 - x$$

$$\text{مساحت} = x \cdot y$$

$$S = x(100-x) = 100x - x^2 \quad , \quad D_s = IR$$

$$x > 0 \quad , \quad y > 0 \quad \Rightarrow 100 - x > 0 \quad \Rightarrow x < 100$$

اوس د $S = 100x - x^2$ په تابع کې $0 < x < 100$ انتروال کې د تابع اعظمي مساحت داسې پیدا کوو:

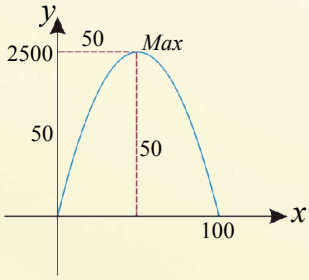
$$S' = 100 - 2x$$

$$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \quad \Rightarrow x = 50 \quad \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$

$$\lim_{x \to 0^+} S(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} S(x) = 0$$

x	0		50		100
S'		+	0	−	
S	0	↗	2500	↘	0



په پایله کې له شکل څخه هم لیدل کېږي چې تر ټولو لوی مساحت هغه وخت لاسته راځي چې د مستطیل طول 50 واحده وي، نو مساحت 2500 واحد مربع کېږي.

6مثال- که د دوو عددونو مجموعه 200 وي، هغه عددونه داسې وټاکئ چې د مربعاتو مجموعه یې اصغري شي.

حل: که چېرې دا عددونه x او y وي، نو $x+y=200$ او که x ، $x^2+y^2=T_{(x)}$ فرض کړو، نو:

$$T_{(x)}=x^2+y^2$$
$$=x^2+(200-x)^2$$
$$=x^2+x^2-400x+(200)^2$$
$$=2x^2-400x+40000$$
$$T'_{(x)}=4x-400$$
$$T'_{(x)}=0$$
$$4x-400=0$$
$$x=100$$

په پایله کې ویلای شو چې د مربعاتو تر ټولو کوچنی مجموعه عبارت ده له: $T_{(100)}=20000$

7مثال- د A ټکی د $y=\frac{2}{x}$ د منحني له پاسه حرکت کوي، تر ټولو کوچنی انتروال د A د نقطې او د مختصاتو د مبدې ترمنځ لاسته راوړو.

حل: د $y=\frac{2}{x}$ د تابع منحني پر مخ د A د نقطې مختصات $A(x,\frac{2}{x})$ دي، نو:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2{}_{(A)}+y^2{}_{(A)}}=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}$$
$$\overline{OA}^2=x^2+\frac{4}{x^2}=d^2 \Rightarrow d'_{(x)}=(x^2)'+(\frac{4}{x^2})'=2x-\frac{8x}{x^4}=2x-\frac{8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=\frac{2x^4-8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=0$$
$$2x^4=8$$
$$x_1=\sqrt{2} \quad , \quad x_2=-\sqrt{2}$$
$$d_{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2+\frac{4}{(\sqrt{2})^2}=2+\frac{4}{2}=\frac{8}{2}=4$$
$$d_{-\sqrt{2}}=4$$

په پایله کې تر ټولو کوچنی فاصله له مبدا څخه 2 واحده ده.

8مثال- یو مکعب مستطیل چې قاعده یې مربع ده، په پام کې نیسو، که د دریو واړو بعدونو مجموعه 24 وي، د مکعب تر ټولو لوی حجم پیدا کړئ.

حل: که د مکعب مستطیل د قاعدې ضلعې ته x او جګوالي ته یې y وویل شي، نو:

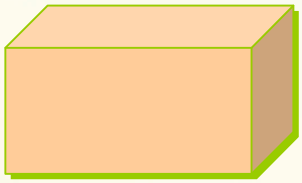
$$x+x+y=24 \Rightarrow y=24-2x$$

څرنګه چې $y \geq 0$ دی، نو $0 \leq x \leq 12$ کېږي او د مکعب مستطیل حجم عبارت دي له:

$$V=x^2 \cdot y \Rightarrow V=x^2(24-2x)=24x^2-2x^3$$

$$V=24x^2-2x^3$$
$$V'(x)=48x-6x^2$$
$$V'(x)=0$$
$$48x-6x^2=0$$
$$x(48-6x)=0$$
$$x_1=0$$
$$48-6x=0$$
$$-6x=-48$$
$$x=8$$

$$V(0)=24\cdot 0^2-2\cdot 0^3$$
$$=0-0=0$$
$$V'(0)=0$$
$$V(8)=24\cdot(8)^2-2\cdot(8)^3$$
$$=1536-1024=512$$
$$V(8)=512$$
$$V(12)=24\cdot(12)^2-2\cdot(12)^3=3456-3456=0$$
$$V(12)=0$$



نو د مکعب مستطیل تر ټولو لوی حجم $512cm^3$ دی.

پوښتنې

1- د $y=x^3+x^2+x+1$ د تابع تحولات پیدا او منحني یې رسم کړئ.

2- که د اوسپنې له یوې تختې څخه چې هره ضلع یې $1m$ طول لري یو سر خلاص بکس جوړېږي. د هغه له څلورو کنجونو څخه څلور مساوي مربع ګانې پرې کړئ او بیا هغه قات کړئ کوچنۍ مربع ګانې په کومه اندازه پرې شي چې نوموړی بکس ممکن اعظمي حجم ولري.

3- د $y=x^2$ ګراف ته ډېره نژدې نقطه له $A(3,0)$ نقطې سره پیدا کړئ.

د څېړکي مهم ټکي

- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متزایده بلل کېږي چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادی او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ او $f'(x) > 0$.
- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متناقصه بلل کېږي چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ او $f'(x) < 0$.
- د تابع له تزاید څخه مطلب دا دی چې د x د متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت زیات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت کم شي.
- په یوه تابع کې تر ټولو لوړې نقطې ته مطلق اعظمي(Absolute Maximum) او تر ټولو ټیټې نقطې ته مطلق اصغري(Absolute Minimum) وایي، د x هغه قیمتونه چې د هغوی لپاره تابع یا اعظمي او یا اصغري قیمتونه اخلي د Extreme په نامه یادېږي.
- مطلق Maximum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اعظمي بلل کېږي، که چېرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اعظمي وایي.
- مطلق Minimum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \ge f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وایي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انتروال کې محدب بلل کېږي، که چېرې په دې انتروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني پورته خواته پروت وي او د تابع دویم مشتق منفي په لاس راځي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې مقعر بلل کېږي، که چېرې په نوموړي انتروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني ښکته خوا پروت وي، او د تابع دویم مشتق مثبت په لاس راځي.
- هغه ټکی چې د تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا برعکس خپل لوری بدلوي، د انعطاف(Inflection) ټکی بلل کېږي.
- هغه تابع ګانې چې د $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ بڼه ولري، د هوموګرافیک تابع ګانو په نامه یادېږي، په دې شرط چې $c \neq 0$ وي.

- که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ او $f(a) = f(b)$ وي، نو لږ ترلږه د x_0 یو ټکی په $a < x0 < b$ په انټروال کې شته چې $f'(x_0) = 0$ دی، دا قضیه د رول د قضیې په نامه یادېږي.
- که چېرې $f(x)$ په $[a,b]$ فاصله کې متمادي او د (a,b) په خلاصه فاصله کې د مشتق وړ وي د x_0 یو عدد د a او b ترمنځ شته چې $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ دی دا د متوسط قیمت قضیه بلل کېږي.

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د (a,b) په انتروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چېرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لېمیټ نسبت کله چې $x \to a$ د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په هغه صورت کې چې $x \to \infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لېمیټ د پیدا کولو لپاره د $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ لېمیت پیدا کوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نیولو ته دوام ورکوو ... تر څو د ابهام شکل ختم شي.

د دریم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1 – که یوه تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادی او د مشتق وړ وي، نو هغه وخت متزاید ده چې :

$a)\ f'(x)=0 \qquad b)\ f'(x)<0 \qquad c)\ f'(x)>0 \qquad d)\ f'(x)\geq 0$

2- په یوه تابع کې تر ټولو لوړې نقطې ته:

$a)$ وایي Absolute Minimum $b)$ وایي Infliction $c)$ وایي Absolute Maximum $d)$ هیڅ یو

3- د $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$ په تابع کې د Extreme ټکی عبارت دی له:

$a)$ دوه ټکي $b)$ یو ټکی $c)$ درې ټکي $d)$ نه لري

4 – هغه ټکی چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته بدلوي:

$a)$ د اعظمی ټکی دی $b)$ دانعطاف ټکی دی $c)$ اصغري ټکی دی $d)$ هیڅ یو

5- د $f(x)=ax^2+bx+c$ د تابع د تعریف ساحه عبارت له :

$a)\ (-\infty\ ,\ +\infty) \qquad b)\ (-\infty\ ,\ 0) \qquad c)\ (\ 0,-\infty) \qquad d)$ هیڅ یو

6- د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

$a)\ x=1 \qquad b)\ x=2 \qquad c)\ x=-1 \qquad d)\ x=-2$

7- د هومو گرافیک تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

$a)\ y=\dfrac{a}{c} \qquad b)\ x=-\dfrac{d}{c} \qquad c)\ y=\dfrac{c}{a} \qquad d)\ y=-\dfrac{c}{d}$

8- د $g(x)=\dfrac{4x^2-6x}{x^2-4}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a)\ 4 \qquad b)\ 6 \qquad c)\ -6 \qquad d)\ -4$

9- لاندې کومه الجبري اړیکه حقیقت لري:

$a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \qquad b)\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f'(x) \qquad c)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \qquad d)$ هیڅ یو

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

1. د $f(x)=x^2-x$ د تابع د منحني میل د $P(3,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

2. د $f(x)=-x^2$ په تابع کې د $[3,4]$ په انتروال کې د منحني د بدلون ټکي پیدا کړئ.

3. د نیوټن د خارج قسمت په مرسته د لاندنیو تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x$ 2) $f(x)=3x^2-1$ 3) $f(x)=\sqrt{2}x$

4. د لاندنیو تابع ګانو په ورکړل شوو نقطو کې مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-1$, $x_0=-1$ 2) $f(x)=x^2$, $x_0=2$

5. د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-4x^2$ 2) $f(x)=3x^3-1$

6. په ورکړل شوو ټکو کې د تابع ګانو مشتق محاسبه کړئ.

1) $f(x)=7x^2-3x$, $x_0=-1$

2) $f(x)=6x^2-2x-1$, $x_0=\frac{1}{2}$

7. د $f(x)=3x^5-4x^2-3x$ د تابع څلور ځلې مشتق ونیسئ او د هغې ګراف رسم کړئ.

8. د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=x^3\sec x$ 2) $f(x)=\sin(3x-1)$ 3) $f(x)=\cos^2 2x$

9. کوم مثبت عدد دی چې د خپل معکوس سره جمع شي د جمعې حاصل یې تر ټولو کوچنی شي؟

10. د $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

11. د $f(x)=\frac{4x^2}{x^2+1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

12. د $f(x)=\sin x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

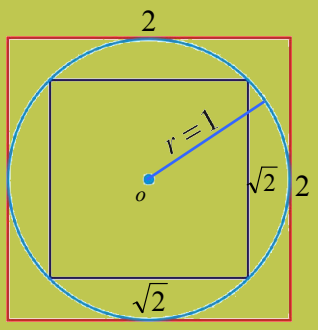
13. د $f(x)=\tan x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

څلورم څپرکی

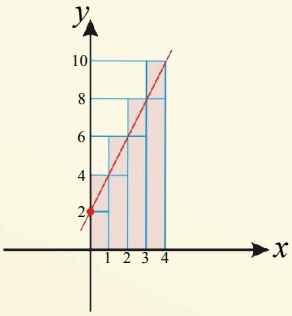
انتیګرال

د ریمان مجموعه

Riemann's Sum



په مخامخ شکل کې که د دایرې شعاع یو واحد ده، د دایرې د محیطي او محاطي څلور ضلعي ګانو مساحت حساب کړئ او وواياست چې ددې دایرې مساحت له مخامخ څلور ضلعي ګانو له مساحت سره څه اړیکه لري؟



- هغه مساحت چې د x د محور او $f(x) = 2x + 2$ د تابع د ګراف په منځ کې د $[0,4]$ په انټروال کې محصور شوی دی، خط خط کړئ.
- د $y = 2x + 2$ تابع په ګراف کې د څلورو لاندېنیو او پورتنیو مستطیلونو مساحتونه چې په شکل کې ښودل شوی دی، پیدا کړئ.

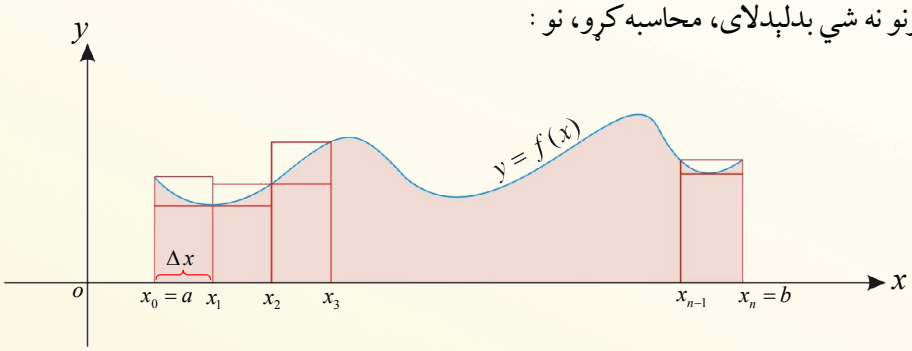
- د پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او د لاندېنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه د تابع د ګراف د لاندېني مساحت سره په ورکړ شوي واټن کې څه اړیکه لري؟
- د پورته په څېر فعالیت د اتو مساوي لاندېنیو مستطیلونو او د اتو مساوي پورتنیو مستطیلونو لپاره تکرار کړئ او پایله یې د ګراف د لاندې مساحت سره په نوموړي واټن کې پرتله کړئ.
- که چېرې د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او لاندېنیو مستطیلونو[1] د جوړولو لپاره د تابع په ګراف کې د فاصلې وېش زیات کړو د پورتنیو او لاندېنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه کوم قیمت ته نژدې کېږي.

---

[1]- که چېرې د x په محور د فاصلو تقسیمات زیات کړو او یا که چېرې په یوه فاصله کې د مستطیلونو شمېر زیات شي، په هم هغه اندازه د ګراف لاندې مساحت د قیق په لاس راځي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف لاسته راځي:

تعریف: فرضوو چې د $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په تړلی انتروال کې متمادي او تعریف شوي وي که چېرې د ناحیې مساحت چې د x د محور او $y=f(x)$ د تابع د ګراف ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو، نو :



د $[a,b]$ تړلې انتروال په n مستطیلو نو وېشو، څرنګه چې د هر مستطیل عرض د $(\Delta x=\dfrac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی تابع قیمت په هماغه نقطه کې دی.

او د مستطیلونو د هر انټروال اوږدوالی د $i=1,2,3,\ \dots\ ,n$ لپاره په لاندې ډول دی:

$$x_0=a, x_1=a+\Delta x, x_2=a+2\Delta x\dots, x_i=a+i\Delta x,\ \dots\ ,x_n=b$$

$$[x_0,x_1]\ ,\ [x_1,x_2]\ ,\ [x_2,x_3],\ \dots\ ,[x_{i-1},x_i],\ \dots\ ,[x_{n-1},x_n]$$

که په شکل کې د لاندینیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي، نو لرو چې:

د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $= f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+\ \dots\ +f(x_{n-1})\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$

د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $= f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\ \dots\ +f(x_n)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چېرې محصور شوی مساحت په A وښیو، نو : $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چېرې د رابطې له اطراف څخه لیمیټ ونیسو، نو لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x \le \lim_{n\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

د ساندوېچ د قضيې پر بنسټ ليکلای شو چې: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = A = \lim_{n\to\infty} 2\sum_{121}^{n} f(xi-1)\Delta x$

نو $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ تـه د ريمـان مجمـوع او ددې مجمـوعې لېميـټ يعنـې $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ تـه د ريمـان د مجموعې لېميټ وايي.

لومړی مثال: د $[0,2]$ انټروال په څلور مساوي برخو ووېشئ، د $y = x^2 + 1$ منحني او x محور تر منځ مساحت پيدا کړئ.

حل: که چېرې $[0,2]$ انټروال پـه څلـورو مـساوي برخـو ووېـشو، نـو د مـستطيلونو عـرض داسـې پـه لاس راځي: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

ددې مستطيلونو دهر انتروال اوږدوالی عبارت دي له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a + \Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 1 \quad , \quad x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0, x_1] \ , \ [x_1, x_2] \ , \ [x_2, x_3] \ , [x_3, x_4]$$

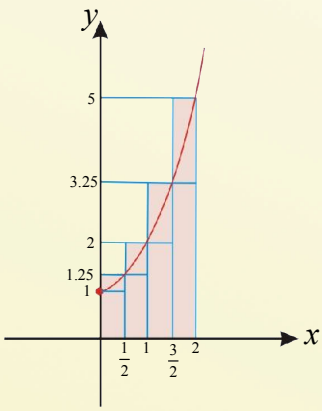
$$[0, \frac{1}{2}] \quad , [\frac{1}{2}, 1] \quad , [1, \frac{3}{2}] \quad , [\frac{3}{2}, 2]$$

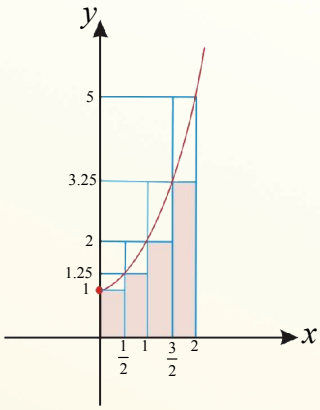
په لاس راغلي قيمتونه د x په ځای په تابع کې وضع کوو.

$$f(x) = x^2 + 1 \ , f(0) = 1$$

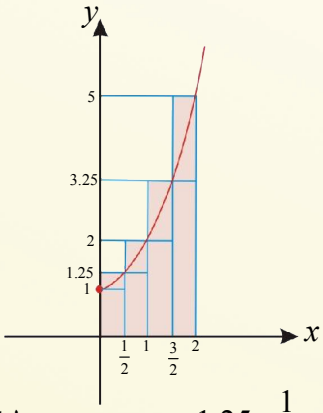
$$f(\frac{1}{2}) = 1.25 \ , \ f(1) = 2$$

$$f(\frac{3}{2}) = 3.25 \ , \ f(2) = 5$$





د لاندېنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $=1\times\frac{1}{2}+1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}=3.75$



د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $=1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{2}=5.75$

$$3.75 < A < 5.75$$

دویم مثال: د $f(x)=1+x$ تابع د ریمان د مجموعې لیمیټ په $[1,10]$ انټروال کې پیدا کړئ.

حل:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i \ = 1 + [\frac{9}{n}]\, i \quad , \quad i = 0,1,2, \ \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\Delta x \sum_{i=1}^{n}(1+x_i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\Delta x \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} x_i]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n}(a+\Delta x i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{9}{n}i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n}(\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\cdot n + \frac{9}{n}(n + \frac{9}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{9}{n}(n + \frac{9n^2+9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{9}{n}(\frac{2n^2+9n^2+9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{9}{n}(\frac{11n^2+9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{99n^2+81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n}]$$

$$= 9 + \frac{99}{2} = 58.5$$

باید په یاد ولرو:

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

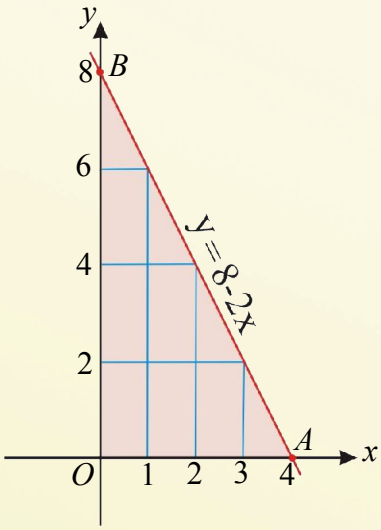
پوښتنې

1. د $[0,3]$ انټروال په بشپړو مساوي برخو له وېشلو څخه وروسته د $y = 3x$ مستقیم خط او د x د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ.

2. د $\Delta x = 0.5$ قیمت لپاره او د لاندې جدول د قیمتونو په پام کې نیولو سره ګراف رسم، د لاندېنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه اود پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه پیدا کړئ.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	14	20	26	32	38	44	50

3. د $y = 8 - 2x$ تابع ګراف د لاندې OAB مثلث مساحت د $[0,4]$ په انټروال کې د ریمان د مجموعې د لیمیټ څخه په ګټه اخیستنې سره پیدا کړئ.



د انتیگرال مفهوم

Concept of Integral

څرنګه چې پوهېږئ د شکلونو لاندېني او پورتني مساحتونه د انتیگرال په واسطه محاسبه کېږي.

آیا کولای شو چې د مخامخ شکل پورتنی مساحت په لاس راوړو.

د هغې تابع انتیگرال چې مشتق یې معین وي او یا په بل عبارت د ریمان مجموعي لېمیټ ته انتیگرال وایي دا($\int$) د انتیگرال علامه ده، د sum د کلیمې یا د ریمان د مجموعې د S توري غزیدلی حالت دی، لکه: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int f(x)dx$ چې دلته $f(x)$ تابع او dx د $f(x)$ تابع د انتیگرال متحول نظر x ته دی.

انتیگرالونه عموماً په دوه ډوله دي. معین او غیر معین انتیگرالونه، هغه انتیگرالونه چې په ترتیب سره یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- غیرمعین انتیگرال *Indefinite Integral*

- که د $F(x) = 2x^2 - 1$ تابع وي له دې تابع څخه مشتق ونیسئ.
- ددې تابع له مشتق څخه انتیگرال ونیسئ.
- په لاس راغلی انتیگرال له لومړنی تابع سره پرتله کړئ او ووایئ چې(-1) په نوموړي تابع کې د څه په نامه یادېږي.
- که په پورتني تابع کې (-1) په C ونوموو د $f(x)$ تابع له څه سره مساوي ده؟
- پورتنی فعالیت د $F(x) = x^6 + 1$ تابع لپاره تکرار کړئ او ووایئ چې $f(x)$ له څه سره مساوي ده.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي:

تعریف: که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په ترلې انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنی تابع وي. د $F(x)+C$ تابع ګانو سټ په داسی حال کې چې C یو ثابت عدد وي د $f(x)$ تابع غیرمعین انتیگرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

لومړی مثال: $\int x\,dx$ پیدا کړئ.

حل: $\int x\ dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$

دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\ dx$ حساب کړئ.

حل: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\ dx = \int x^{-\frac{3}{7}}\ dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + C$

دریم مثال: $\int x^{\frac{3}{2}}\ dx$ پیدا کړئ.

حل: $\int x^{\frac{3}{2}}\ dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

پوښتنې

لاندې انتیګرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int \sqrt[5]{x^3}\ dx$

b) $\int \frac{1}{x^4}\ dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$

d) $\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt[4]{x^2}}$

e) $\int \sqrt[8]{x^4} \cdot x\ dx$

د غیرمعین انتیگرال خواص

Properties of indefinite integral

تاسې د لېمیټ او مشتق خواص مخکې مطالعه کړي؟ آیا کیدای شي چې ورته خواص په غیر معین انتیگرال کې هم وي؟

$$\left.\begin{array}{l} \int k\ dx \\ \int [f(x) \pm g(x)]\ dx \\ \int [f(x) \cdot g(x)]\ dx \\ \int \dfrac{f(x)}{g(x)} dx \quad , g(x) \neq 0 \end{array}\right\} = ?$$

د مشتقاتو له خواصو څخه په کار اخیتسنې د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

$$f(x) = 3x^4$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راوړو:

څرنگه چې د تابع گانو د مشتق د پیدا کولو لپاره له ځانگړو قوانینو څخه گټه اخیستل کېږي، غیرمعین انتیگرالونه هم د داسې خواصو لرونکي دي چې هغه پرته له ثبوت څخه قبلوو:

1- که k یو ثابت عدد وي، نو لرو چې: $\int kdx = k\int dx = kx + C$

مثال: د $\int 5dx$ انتگرال پیدا کړئ.

حل : $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$

2- که چېرې $n \neq -1$ وي، نو : $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

مثال: د $\int x^4 dx$ **انتیگرال** پیدا کړئ.

حل: $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$

3- که چېرې a یو ثابت عدد او $f(x)$ تابع وي، **نو:**

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

مثال: د $\int 2x^2\, dx$ **انتیگرال** محاسبه کړئ.

حل: $\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2\frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^3 + C$

4- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابع گانې وي په دې صورت کې د تابع گانو د جمع او تفریق د حاصل انتیگرال مساوي دی په:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثالونه:

$$a)\quad \int (2x^2 + 3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + C$$

$$b)\quad \int (8 - 2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + C$$

5- که چېرې د تابع گانو ترادف تر انتیگرال لاندې وي، په دی صورت کې د دوی انتیگرال مساوي دی په:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$$

مثال:

$$\int [x^3 - 6x^2 + 9x + 1]dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9xdx + \int dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C$$

6- که $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابع ګانې وي، په دې حالت کې د تابع ګانو د ضرب د حاصل انتیګرال، مساوي نه دی د انتیګرالونو د ضرب له حاصل سره په جلا توګه، یعنې:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

مثال: که چېرې $f(x)=x+1$ او $g(x)=x-2$ وي، نو:

حل الف: لومړی په تابع ګانو د ضرب عملیه تطبیق کوو او وروسته یې انتیګرال په لاس راوړو:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx = \int[(x+1)(x-2)]dx = \int(x^2-2x+x-2)\,dx$$
$$= \int(x^2-x-2)\,dx$$
$$= \int x^2dx - \int x\,dx - \int 2\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

حل ب:اوس د هرې تابع انتیګرال بېلا بېل محاسبه کوو او وروسته یې سره ضربوو په لاس راغلي قیمتونه سره پرتله کوو.

$$\int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx = \int(x+1)\,dx \cdot \int(x-2)\,dx = (\int x\,dx + \int dx)(= \int x\,dx - \int 2\,dx)$$
$$= (\frac{x^2}{2}+x+C)(\frac{x^2}{2}-2x+C) = (\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$
$$\Rightarrow \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C \neq (\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$

په پایله کې څرګنده شوه چې نوموړی مساوات حقیقت نه لري.

7- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابع ګانې وي په دې صورت کې د توابعو د تقسیم د حاصل انتیګرال مساوي نه دی. د هرې تابع د انتیګرال له حاصل تقسیم سره، یعنې: $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

مثال: که چېرې $f(x)=x^2+2x$ او $g(x)=x$ وي، نو لرو:

د الف جزء حل: لومړی د تابع ګانو د تقسیم د حاصل انتیګرال په لاس راوړو.

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int \frac{x^2+2x}{x}dx = \int(\frac{x^2}{x}+\frac{2x}{x})dx = \int(x+2)dx = \int xdx + \int 2dx = \frac{1}{2}x^2+2x+C$$

د ب جزء حل: اوس د صورت او مخرج د تابع گانو انتیگرالونه بېلا بېل په لاس راوړو او وروسته یې سره پرتله کوو.

$$\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}=\frac{\int (x^2+2x)dx}{\int xdx}=\frac{\int x^2dx+\int 2xdx}{\int xdx}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}x^3+x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C=\frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2}+\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C$$

په پایله کې څرگنده شوه چې

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$

پوښتنې

د انتیگرال له خاصیتونو څخه په گټه اخیستنې سره لاندې انتیگرالونه محاسبه کړئ:

$a)\quad \int -17dx=?$

$b)\quad \int\frac{(1+x)^2}{1+x}dx=?$

$c)\quad \int 2x^4dx=?$

$d)\quad \int\frac{1}{x^5}dx=?$

$e)\quad \int(2x^2+4x^3-5x+9)dx=?$

$f)\quad \int(2x+3)^6dx=?$

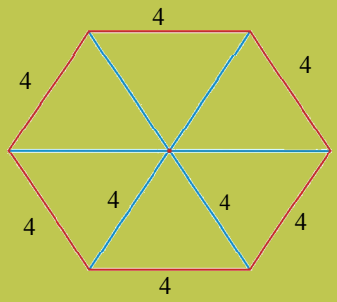
$g)\quad \int\frac{x^3+2x^2}{x^2}dx=?$

$h)\quad \int(2+x)dx=?$

معین انتیگرال

Definite Integral

د شپږ ضلعي دننه مثلثونو د مساحتونو مجموعه پیدا او د شپږ ضلعي له مساحت سره یې پرتله کړئ.



- د $f(x)=2x$ د تابع گراف د $[2,5]$ په انتروال کې د $n=5$ لپاره رسم کړئ او د گراف لاندېنی مساحت پیدا کړئ
- په شکل کې د گراف لاندېنی مساحت د کومو دوو عددونو ترمنځ پروت دی.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي وی، نو د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لیمیټ ته کله چې n بې‌نهایت ته نژدې شی او د فرعي انتروالونو (Δx) لوی اوږدوالی صفر ته نژدې شي، د $f(x)$ تابع له $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې د معین انتیگرال په نوم یادېږي، یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

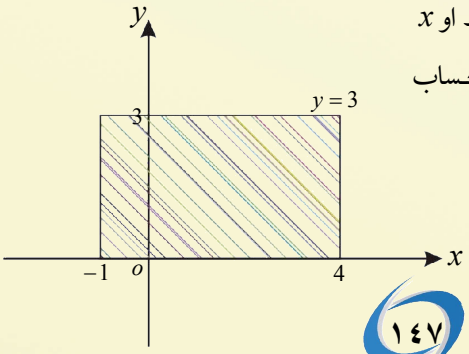
چې a ته د انتیگرال لاندېنی سرحد او b ته د انتیگرال پورتنی سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2\,dx$ انتیگرال قیمت پیدا کړئ.

حل: لومړي د $F(x)$ لومړنی تابع پیدا کوو او بیا د مطلوب انتیگرال قیمت ټاکو:

$$\int_1^3 x^2dx=[\frac{x^3}{3}]_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{27-1}{3}=\frac{26}{3}$$

دویم مثال: هغه مساحت چې د $y=3$ خط او x محور ترمنځ په $[-1,4]$ انتروال کې محصور دی حساب کړئ.



حل: د $\int_{-1}^{4} 3\ dx$ معین انتیگرال د یوه مستطیل مساحت راښیي چې په تېر شکل کې لیدل کېږي.

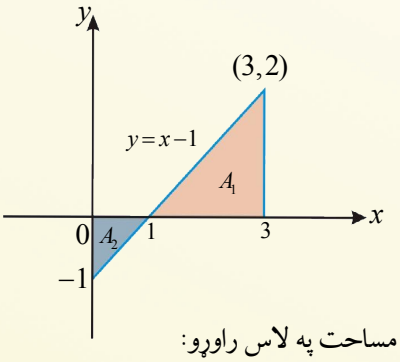
ددې مستطیل مساحت د مستطیل د عرض او طول د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

د مستطیل مساحت $= 3[4-(-1)] = 3\cdot 5 = 15$

له انتیگرال څخه په ګټه اخیستنې سره د مستطیل مساحت په لاندی ډول محاسبه کوو.

$$\int_{-1}^{4} 3\ dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

دریم مثال: هغه مساحت چې د $y = x-1$ مستقیم خط او x محور ترمنځ په $[0,3]$ انټروال کې محصور دی په لاس راوړی.



حل:

له شکل څخه په ګټه اخیستنې سره لومړی د ښي خوا د لوی مثلث مساحت په لاس راوړو:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2\cdot 2) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

د کوچني مثلث مساحت عبارت دی له:

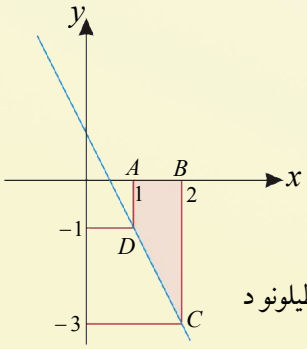
$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

د A_1 او A_2 د مساحتونو مجموعه عبارت ده له:

$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

په پایله کې د نوموړي انتیگرال قیمت عبارت دی له: $\int_{0}^{3}(x-1)\ dx = [\frac{x^2}{2} - x]_0^3 = [\frac{3^2}{2} - 3] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$

پوښتنې



1. د مخامخ شکل څخه په کار اخیستنې سره هغه مساحت چې د $y = -2x+1$ د مستقیم خط او د x د محور ترمنځ په $[1,2]$ انتروال کې محصور دی په لاس راوړئ.
2. د $f(x) = x^2$ تابع د لاندېنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه په $[0,1]$ انټروال کې د $n = 4$ لپاره په لاس راوړئ.

د معین انتیگرال خواص

Properties of definite integral

آیا کولای شو چې د غیرمعین انتیگرال د ځانګړونو څخه په ګټه اخیستنې سره مخامخ اړیکې پوره کړو.

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b c\,dx \\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx \\ \int_a^a f(x)\,dx\end{array}\right\} = ?$$

- د $\sum_{k=1}^{4} 3k^2$ مجموعه حساب کړئ.
- د $\int_a^b x\,dx$ د انتیگرال قیمت د $[-1,1]$ په انټروال کې پیدا کړئ.
- د $\int_0^2 (1+3x)\,dx$ انتیگرال محاسبه کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د ځینو انتیگرالونو محاسبه د قیمت په وضع کولو سره امکان لري او ځینې یې امکان نه لري، دې ته اړتیا پیدا کېږي، ترڅو معین انتیگرال ثبوت کړو.

1. د ثابتې تابع انتیگرال د $[a,b]$ په انټروال کې یعنې $\int_a^b C dx$ عبارت دی، له:

$$\int_a^b C\,dx = C\int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په n مساوي برخو، یعنې $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ وېشو او د هر x_i لپاره د i - ام انټروال څخه لرو: $i = 0,1,2,\ldots,n$ $\qquad f(x_i) = C$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\,\Delta x_i = C(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = C(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \ldots + \frac{b-a}{n})$$

$$= C(b-a)(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a) \Rightarrow \int_a^b C dx = C(b-a)$$

مثال: $\int_3^4 dx$ معین انتیگرال حساب کړئ.

حل: $\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4-3=1$

2. که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې انتیگرال منونکی وي او k یو ثابت حقیقي عدد وي، نو لرو چې:

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که چېرې د $[a,b]$ انټروال د x_i ، $i=1,2,\ldots,n$ په n مساوي برخو ووېشو، نو د ریمان د مجموعې او انتیگرال د تعریف له مخې لیکلای شو:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} k\, f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = k\int_a^b f(x)\ dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4\ dx$ ټاکلی انتیگرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_{-2}^{2} 4dx = 4\int_{-2}^{2} dx = 4[x]_{-2}^{2} = 4(2-(-2)) = 4\cdot 4 = 16$

3. که د $F(x)$ تابع یوه لومړنی تابع د $f(x)$ او په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = -(-F(b)+F(a))$$

$$= -(F(a)-F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: د $\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$ انتیگرال مساوات پیدا کړئ.

حل: لومړی د کېږ لوری انتیگرال او وروسته د ښیې خوا انتیگرال محاسبه کوو:

$$\int_2^3 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2} = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

د لاسته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره پایله په لاس راځي:

$$\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$$

4- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي په هغه صورت کې لرو چې: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

ثبوت: څرنګه چې $\Delta x = 0$ دی، نو:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2\,dx$ انتیگرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_3^3 3x^2 dx = [\frac{3x^3}{3}]_3^3 = [x^3]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$

5- که $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې په $[a\ ,b]$ انټروال کې انتیگرال منونکي وي، نو:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\ dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) \pm g(x_i)]\ \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

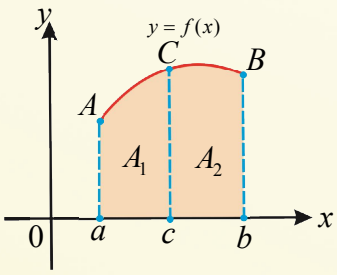
مثالونه:

حل:

$$a)\quad \int_0^1 (4+3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2\,dx = 4[x]_0^1 + 3\,[\frac{x^3}{3}]_0^1 = 4+1=5$$

$$b)\quad \int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2 dx - \int_0^3 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6. که چېرې د $f(x)$ تابع د (a,b) په یوه تړلی انټروال کې څرنګه چې $a<c<b$ دی د a, b او c ټکی پکی شامل دي انتیګرال منونکي وي، نو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$



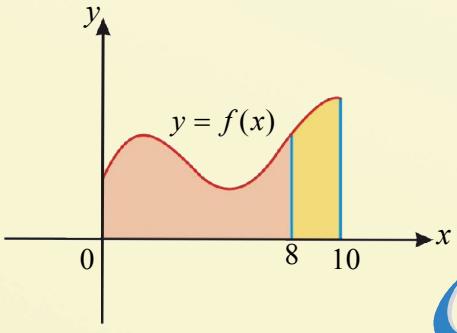
ثبـــوت: دلتـه د $[a,b]$ انټـروال پـه دوو انټروالونـو د $[a,c]$ او $[c,b]$ تقـسیموو، وروسـته د $f(x)$ تـابع انتیګـرال پـه نومـوړو انټروالونو کې په پام کې نیسو.

د انتیګرال اصلي مفهوم ته په پام $A=\int_a^b f(x)dx$ پـه حقیقـت کې د هغې سـطحې مـساحت دی چې د $f(x)$ د تابع د ګراف او x د محور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کې محصوره ده. په داسې حال کې چې د هغې سطحې مساحتونه چې د $f(x)$ ګراف او د x د محور ترمنځ د $[a,c]$ او $[c,b]$ په انټروالونو کې محصوره ده او په شکل کې واضح لیدل کېږي عبارت ده له: $A_1=\int_a^c f(x)\,dx$ ، $A_2=\int_c^b f(x)\,dx$

په پایله کې ویلای شو چې : $A=A_1+A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

مثال: که چېرې $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx=12$ وي، نو د $\int_8^{10} f(x)dx$ انتیګرال قیمت محاسبه کړئ.

حل:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx$$

اوس د $\int_{8}^{10} f(x)\,dx$ انتیگرال قیمت په لاس راوړو:

$$\int_{8}^{10} f(x)\,dx = \int_{0}^{10} f(x)\,dx - \int_{0}^{8} f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

7. که چېرې د $f(x) \le g(x)$ تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې انتیګرال منومنکي وي، نو لرو:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \le \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x) - f(x)]\,\Delta x$$

نو څرنګه $g(x) - f(x) \ge 0$ او $\Delta x \ge 0$ دی، نو د سلسلې هر حد مثبت دی، نو د هغې لیمیټ هم منفي نه دی یعنې:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - f(x_i)]\,\Delta x \ge 0 \Rightarrow \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]\,dx \ge 0$$

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx \ge 0 \Rightarrow \int_{a}^{b} g(x)\,dx \ge \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

مثال: که چېرې $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي، نو د $x > 1$ لپاره وښیاست چې $\int_{a}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{b} g(x)dx$ دی.

حل:

$$\int_{a}^{b} (1 - \frac{x^2}{4})\,dx \le \int_{a}^{b} (1 + \frac{x^2}{2})dx$$

$$\int_{a}^{b} 1\,dx - \int_{a}^{b} \frac{x^2}{4}\,dx \le \int_{a}^{b} 1\,dx + \int_{a}^{b} \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \le [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

پوهېږو چې $(b-a)>0$ دی، نو:

$$(b-a)-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le(b-a)+\frac{1}{6}(b^3-a^3) \qquad /\div(b-a)$$

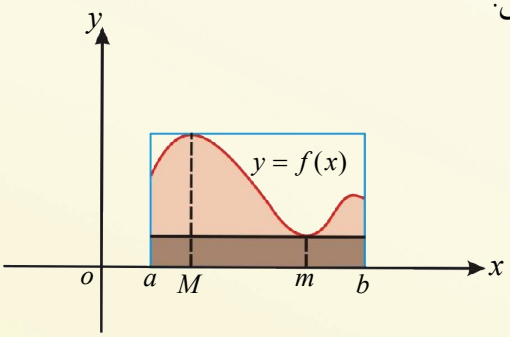
$$1-\frac{1}{12}(a^2+ab+b^2)\le 1+\frac{1}{6}(a^2+ab+b^2)$$

$$-\frac{1}{12}\le+\frac{1}{6}^3 \qquad /\div(a^2+ab+b^2)$$

$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6}$$

8. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او m,M قیمتونه په ترتیب سره د تابع مطلق اعظمي او مطلق اصغري قیمتونه په نوموړی انټروال کې وی، نو $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

ثبوت: څرنګه چې $m\le f(x)\le M$ دی، نو لرو چې:



$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

چې دا وروستنی اړیکه د انتیګرال د تخمیني قضیې په نامه یادېږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ انتیګرال په تخمیني توګه حساب کړئ.

حل: څرنګه چې د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري دی، نو لرو چې:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0)\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1(1-0)$$

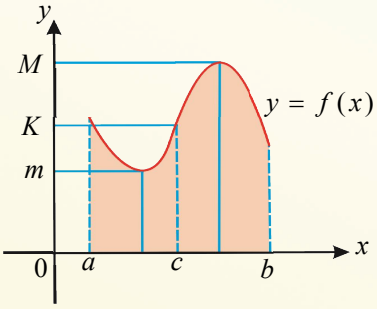
$$e^{-1}\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1$$

$$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0{,}3679\Rightarrow 0.3679\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1$$

په پایله کې د انتیګرال تخمیني قیمت د 1 او 0.3679 قیمتونو ترمنځ قرار لري.

9. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو د c یو حقیقي عدد شته چې: $a \le c \le b$ دی، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



ثبوت: د $a < b$ لپاره m او M قیمتونه په ترتیب د تابع مطلق اصغري او اعظمي قیمتونه د $[a,b]$ په انټروال کې وي، لکه: مخامخ شکل د انتیګرال د تخمیني قضیې څخه په کار اخیستنې د $c \in [a,b]$ لپاره لرو چې:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \quad \Rightarrow \quad m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

فرضوو $K = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ وي، نو $m \le K \le M$ دی او د هر c حقیقي عدد لپاره، $a \le c \le b$ لرو چې: $K = f(c)$ نو: $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

چې دا وروستی اړیکه د متوسط قیمت د قضیې په نامه یادېږي څرنګه چې $f(c)$ د تابع متوسط قیمت په $[a,b]$ انټروال کې دی.

مثال: د $f(x) = x^2$ تابع په $[1,4]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ آیا کولای شئ $\int_1^4 x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_1^4 = [\frac{64}{3} - \frac{1}{3}] = [\frac{64-1}{3}] = \frac{63}{3} = 21$ دی.

حل: څرنګه چې $f(x) = x^2$ تابع ده، اوس که د x په ځای د c قیمت په تابع کې وضع کړو نو: $f(c) = c^2$ سره کېږي چې دلته د متوسط قیمت د قضیې د فورمول څخه د c قیمت داسې په لاس راځي: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

اوس په پورتنۍ رابطه کې يې قيمت اېږدو، لرو چې:

$$\int_1^4 x^2\,dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$k = f(c) \quad , \quad f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7 \quad , \quad k = 7$$

ښکاره شوه چې د تابع يو قيمت مساوي په k او $1 < \sqrt{7} < 4$ دی.

له مخکې څخه پوهېږو چې د مستطيل مساحت د سور او اوږدوالي له ضرب سره برابر دی، نو د متوسط قيمت په فورمول کې $f(c)$ اوږدوالي او $b-a$ سور دی، نو د منحني لاندې مساحت په $[1,4]$ انټروال کې مساوي له هغه مستطيل سره دی چې اضلاع يې 7 او 3 دی.

پوښتنې

1. لاندې معين انتيګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\int_{-1}^{1}(x^3+2)\,dx = ?$

$b)\int_{2}^{5}7x\,dx = ?$

$c)\int_{-2}^{4}(-x)\,dx = ?$

$d)\int_{-1}^{3}(2|x|-3x)\,dx = ?$

$e)\int_{-2}^{3}3x\,dx$

$f)\int_{-1}^{2}(x^3-\frac{1}{2}x^4)\,dx = ?$

$g)\int_{-4}^{4}(2x^2-\frac{1}{8}x^4)\,dx = ?$

$h)\int_{1}^{3}\sqrt{x}\,dx$

2. د $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ انتيګرال قيمت د $[-1,4]$ په انټروال کې داسې پيدا کړئ چې $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5$ او $\int_{1}^{4} f(x)dx = -2$ وي.

3. د $f(x) = x$ تابع په $[0,2]$ انټروال کې په نظر کې ونيسئ او د c قيمت په لاس راوړئ.

10- د انتیگرال او مشتق اساسي قضیې

یو موټر په $72\frac{m}{\sec}$ چټکتیا سره په حرکت کې دی، دریور برک ته فشار ورکوي او موټر له 6 ثانیو وروسته ودرېږي په دې وخت کې وهل شوي فاصله پیدا کړئ.

$$S(t) = v_0 \cdot t$$

- له مشتق د تعریف څخه په ګټې اخیستنې سره د $f(x) = x^2$ د تابع مشتق د $h = 0$ په ټکي کې پیدا کړئ.
- د په لاس راغلی تابع انتیګرال په $[0,1]$ انټروال کې محاسبه کړئ.
- د په لاس راغلو دواړو حالتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه په لاس راځي چې:

د انتیګرال او مشتق تر منځ یوه منطقي اړیکه شته چې له دې اړیکې څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د انتیګرال اصلي او اساسي قضیې په لاندې ډول ثبوت کړو:

1- د انتیګرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ دی.

ثبوت: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره د $f(x)$ تابع په $[a,x]$ انټروال کې متمادي ده په پایله کې د $f(x)$ تابع په دې انټروال کې انتیګرال منونکې هم ده.

اوس د $F(x)$ تابع مشتق د تعریف مطابق لیکو او بیا د x متحول ته د h په اندازه تزاید ورکوو، لکه په لاندې ډول:

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)+F(a)-F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)-(F(x)-F(a))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x)\Big|_a^{x+h}-F(x)\Big|_a^{x}}{h}$$

اوس د $f(x)$ تابع په $f(t)$ عوض کوو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t)\Big|_a^{x+h}-F(t)\Big|_a^{x}}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

نظر دریم خاصیت ته لرو چې: $\int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x+h} f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیې څخه $f(c)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ چې c د x او $x+h$ تر منځ واقع دی، نو کله چې h صفر ته تقرب وکړي c، x ته تقرب کوي، همدارنګه د f تابع له متمادیت څخه لرو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

په پایله کې: $F'(x)=f(x)$

مثال: د $f(x)=\int_2^{x^2+1}\frac{1}{t^2+1}$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ یا $F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$

$u=g(x)=x^2+1$

$f(t)=\frac{1}{t^2+1}$

د زنځیري قاعدې له مخې لرو: $F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$

$$F'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$F'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

2- د انتیگرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

که چېرې $F(x)$ د $f(x)$ تابع لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

ثبـــوت: لــه مخکــې قــضیې څخــه پــوهېږو چــې کــه $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ دی لــه دې ځایــه د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ نو د دې دوو مقدارونو خلاف یو ثابت مقدار شته چې:

$$f(x) - F(x) = k \Rightarrow f(x) = F(x) + k$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t)dt = f(x) = F(x) + k$$

$$\int_a^x f(t)\ dt - F(x) = k$$

که د x په ځای په پورتنی رابطه کې a وضع کړو، نو:

$$\int_a^a f(t)\ dt - F(a) = k \quad , \quad 0 - F(a) = k \ \Rightarrow\ k = -F(a)$$

که د k قیمت په لومړی رابطه کې وضع کړو، نو: $\int_a^x f(t)dt - F(x) = -F(a)$

که د x په ځای په دې رابطه کې b وضع شي، نو: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

چې اخیري رابطه په $\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b$ په شکل ښودل کېږي دغه وروستی اړیکه د لومړنی تابع او $\int_a^b f(t)\,dt$ انتیگرال ترمنځ اړیکه ښیي چې د نیوټن "لایبنز" رابطې په نوم هم یادېږي.

یادونه:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\int \cos ec^2 x\,dx = -\cot x + c$$

مثال: د $\int_0^1 x^2 dx$ انتیگرال حاصل پیدا کړئ.

حل: $$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

پوښتنې

1. **لاندې مشتقات پیدا کړئ.**

$a)\ F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$

$b)\ F(t) = \int_0^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$

$c)\ F(t) = \int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1+y^2} dy$

$d)\ F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$

2. که په $f(t) = t$ تابع کې $F(0) = 2$ وي، د $F(b)$ مقدار په $0, 0.2, 0.4, \ldots, 1$ ټکو کې پیدا کړئ.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ پیدا کړئ.

11- په تعویضي طریقې سره انتیګرال نیونه

_ آیا کولای شئ چې مخامخ انتیګرال د نامعین انتیګرال له خواصو څخه په کار اخېستنې سره حل کړئ.

_ که نه شی کولای، نو د جذر لاندې افاده په یوه متحول سره عوض کړئ او بیا هغه حساب کړئ او ووایئ چې په انتیګرال کې د وضع کولو دا طریقه په څه نوم یادېږي.

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

- د $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\ dx$ انتیګرال کې د جذر لاندې افاده په u سره عوض کړئ.
- د u مشتق ونیسي او د dx قیمت پیدا کړئ.
- څرنګه چې نوموړی انتیګرال یو معین انتیګرال دی، نو د $u = 2x+1$ په معادله کې د $x = 0$ او $x = 4$ قیمتونه وضع او د انتیګرال حددونه د u له جنسه په لاس راوړی، وروسته د انتیګرال قیمت محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکی وي، $u = g(x)$ او $F'(x) = f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du = g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لومړی مثال: د $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو:

$$u=3-5x \quad , \quad du=-5\,dx \qquad\qquad dx=-\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=3-5x \end{cases} \Rightarrow u=3-5\cdot 1=-2 \quad \Rightarrow u=-2$$

$$\begin{cases} x=2 \\ u=3-5x \end{cases} \Rightarrow u=3-5\cdot 2=3-10 \quad \Rightarrow u=-7$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}=\int_{-2}^{-7}\frac{1}{u^2}(-\frac{1}{5})\,du=-\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7}=\left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7}=\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$ انتیگرال حساب کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو.

$$u=1+2x^3 \quad , \quad du=6x^2\,dx \Rightarrow x^2dx=\frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x=0 \\ u=1+2x^3 \end{cases} \Rightarrow u=1+2\cdot 0=1 \Rightarrow u=1$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=1+2x^3 \end{cases} \Rightarrow u=1+2\cdot 1=3 \Rightarrow u=3$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx=\int_1^3 u^5\,\frac{1}{6}\cdot du=\frac{1}{6}\int_1^3 u^5du=\frac{1}{6}[\frac{u^6}{6}]_1^3=\frac{1}{6}[\frac{3^6}{6}-\frac{1}{6}]$$

$$=\frac{1}{6}[\frac{729}{6}-\frac{1}{6}]=\frac{1}{6}[\frac{728}{6}]$$

$$=\frac{728}{36}=\frac{182}{9}=20.\overline{2}$$

- د $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ انتیگرال کې د جذر لاندې افاده د u په متحول سره تعویض کړئ.
- له u څخه مشتق ونیسئ او په لاس راغلی قیمت په لومړنی انتیگرال کې وضع او هغه حساب کړئ.

- له پورته څخه د $F(x)+C$ په لاس راغلي تابع څخه مشتق ونیسئ او له هغې څخه لومړنی تابع په لاس راوړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که د $F(u)$ تابع د $f(u)$ لومړنی تابع وي، د $u=g(x)$ د متحول په تعویض سره یوه بله تابع چې مستقل متحول یې x او متمادي مشتق ولري له زنځیري قاعدې څخه په کاراخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

لومړی مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیګرال حساب کړئ.

حل: د جذر لاندې افاده په u سره عوض کوو.

$$u=1-4x^2\ ,\ du=-8x\,dx$$

$$xdx=-\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{u}}(-\frac{1}{8})\,du=-\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du=-\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du=-\frac{1}{8}\,(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1})+C$$

$$=-\frac{1}{8}(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(2\sqrt{u})+C=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$$

دویم مثال: $\int x^3\cos(x^4+2)dx$ حساب کړئ.

حل: که چېرې $u=x^4+2$ وضع کړو په لاس راځي:

$$u=x^4+2\ ,\ du=4x^3dx\ ,\ x^3dx=\frac{1}{4}du$$

$$\int x^3\cos(x^4+2)\,dx=\int \cos u\cdot\frac{1}{4}du$$

$$=\frac{1}{4}\int \cos u\,du$$

$$=\frac{1}{4}\sin u+C$$

$$=\frac{1}{4}\sin(x^4+2)+C$$

پوښتنې

لاندې انتیګرالونه د تعویض له لارې محاسبه کړئ.

$a)\ \int \cos 3x\, dx = ?$

$b)\ \int_1^2 x\sqrt{x-1}\ dx = ?$

$c)\ \int_0^7 \sqrt{4+3x}\ dx = ?$

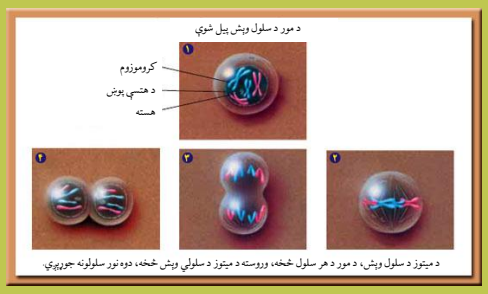
$d)\ \int 2\sqrt[5]{(1-4x)^2}\, dx = ?$

$e)\ \int 2x(x^2+3)^4\, dx = ?$

$f)\ \int_0^5 \frac{x\, dx}{x^2+10} = ?$

$g)\ \int \sqrt{\cos x}\ \sin x\ dx = ?$

12- په قسمي طریقې سره انتیګرال نیونه Integration by Parts



د میتوز د سلول وېش، د مور د هر سلول څخه، وروسته د میتوز د سلولي وېش څخه، دوه نور سلولونه جوړېږي.

د حجروي وېش په وخت کې یوه حجره په دوو یا څو حجرو وېشل کېږي. آیا کولای شئ دا لاره(روش) په نورو شیانو کې، لکه: تېره، شګه او نورو کې ووینو که څواب هو وي، نو دا لاره د څه په نامه یادېږي.

- د $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ انتیګرال په تعویضي طریقه حل کړئ.
- د $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ انتیګرال قیمت په تعویضي طریقه پیدا کړئ.
- آیا کولای شئ چې د $\int x^2 \sin x dx$ انتیګرال په تعویضي طریقه حل کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دې پایلې ته رسېږو:

د $\int f(x)g(x)\,dx$ په انتیګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکی تابع ګانې دي چې یوه له بلې سره د ضرب وړ وي یا نه وي، خو د انتیګرال محاسبه یې اسانه کار نه دی، که چېرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ وضع کړو، د ضرب حاصل مشتق یې مساوي په: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$ دی.

له پورتنۍ رابطې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو اوله اطراف څخه انتیګرال نیسو:

$$v'\cdot u=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$

$$\int v'\cdot u\ dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\ dx \quad \text{یا} \quad \int udv=u\cdot v-\int vdu$$

چې پورتنۍ رابطې ته د غیرمعین انتیګرال فورمول په قسمي طریقه وایي.

که د u او v تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعریف شوی وي، لاندې فورمول د معین انتیګرال فورمول په قسمي لاره(طریقه) بلل کېږي.

$$\int_a^b v'u\,dx=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vu'\,dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

لومړی مثال: د $\int x\sin x\,dx$ انتیګرال پیدا کړئ.

حل:

$$u = x \quad , \quad du = dx$$
$$dv = \sin x\,dx \quad , \quad v = -\cos x$$
$$\int u dv = u\cdot v - \int v du$$
$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\ dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -x e^x\,dx$ انتیګرال حساب کړئ.

حل:

$$u = -x \quad , \quad du = -dx \quad , \quad -du = dx$$
$$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$$
$$\int_a^b v'\cdot u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot u'\,dx$$
$$\int_0^1 -xe^x\,dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$
$$= -e^1 + 0\cdot e^0 + [e^x]_0^1$$
$$= -e^1 + e^1 - e^0 \ = -e^0$$
$$= -1$$

یادونه:

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

پوښتنې

لاندې انتیګرالونه حساب کړئ.

$a)\ \int \theta\cos\theta\ d\theta = ?$

$b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = ?$

$c)\ \int x^5\cos(x^3)\,dx = ?$

$d)\ \int_0^1 x e^x\,dx = ?$

د ریمان مجموعه: فرضوو د $y=f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او تعریف شوی وي او د هغې ناحیې مساحت چې د x محور او د $y=f(x)$ منحني ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو.

د $[a,b]$ انټروال په n مستطیلو نو تقسیموو څرنګه چې د هر مستطیل عرض د $(\Delta x=\frac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی د تابع قیمت په هم هغه ټکي کې، دا فاصلې په لاندې ډول دي:

او د مستطیلونو انټروالونه د n, ... , $i=1,2,3,$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0=a \quad , \quad x_1=a+\Delta x \quad , \quad x_2=a+2\Delta x, \ \dots \ , x_i=a+i\Delta x, \ \dots \ , x_n=b$$

$$[x_0,x_1] \ , \ [x_1,x_2] \ , \ [x_2,x_3], \ \dots \ ,[x_{i-1},x_i], \ \dots \ ,[x_{n-1},x_n]$$

که د لاندېنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي او د محصور شوي سطحې مساحت په A وښیو، نو لرو چې:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

نامعین انتیګرالونه:که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنی تابع وي. د $F(x)+C$ توابعو ستې چې c یو ثابت عدد وي د غیرمعین انتګرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي: $\int f(x)dx=F(x)+C$

د نامعین انتیګرالونو خواص(ځانګړتیاوې):

$$\int kdx=k\int dx=kx+C$$

$$\int a\,f(x)\,dx=a\int f(x)\,dx$$

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)\ dx\pm\int g(x)\ dx$$

$$\int[f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\dots+\int f_n(x)dx$$

$$\int[f(x)\cdot g(x)]\ dx\neq\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx$$

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx} \quad , \ g(x)\neq 0$$

معین انتیگرال: د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لېمیټ ته په $[a,b]$ انټروال کې کله چې n بې‌نهایت ته نژدې شي د Δx فرعي انټروالونو اوږدوالی صفر ته نژدې کېږي چې د $f(x)$ تابع معین انتیگرال د $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې په نوم یادېږي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

a ته د انتیگرال لاندېنی سرحد او b ته د انتیگرال پورتنی سرحد وایي.

د معین انتیگرال خواص(ځانگړتیاوې):

$$\int_a^b C\ dx=C(b-a)$$

$$\int_a^b k\,f(x)dx=\ k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

$$f(x)\le g(x)\ \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)\ \ \Rightarrow\ f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

د انتیگرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق وړ ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ دی.

د انتیگرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

- که چېرې $F(x)$ تابع د $f(x)$ لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

- که $F(u)$ د $f(u)$ لومړنی تابع وي او له $u=g(x)$ متحول سره تعویض شي چې مستقل متحول یې x او متمادي مشتق ولري. له زنځیري قاعدې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

- که $F(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکي وي او $u=g(x)$ همدارنګه له $F'(x)=f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du=g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\;g'(x)\;dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

- د $\int f(x)g(x)dx$ انتیگرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکي تابع ګانې وي چې په خپل منځ کې قابل د ضرب وي او یا نه وي، خو د انتیگرال محاسبه یې آسانه کار نه دی، که چېرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ سره عوض شي، د هغوی د حاصل ضرب مشتق عبارت دی له:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$$

له پورتني اړيکې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو او له دواړو خواوو څخه انتيګرال نيسو:

$$\int v'\cdot u\ dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\ dx \quad \text{يا} \quad \int udv = u\cdot v - \int vdu$$

چې اخيرى اړيکې ته د غير معين انتيګرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

- که د u او v تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعريف شوى وي لانـدې فورمـول، د معـين انتيګـرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کېږي:

$$\int_a^b v'u\,dx = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vu'\,dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b udv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې معینو انتیګرالونو قیمت پیدا کړئ.

$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx$ $\quad b)\ \int_{-4}^{4}[2x^2-\frac{1}{8}x^4]dx$ $\quad c)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx$

$d)\ \int_0^3 4dx$ $\quad e)\ \int_1^3 \sqrt{x}\ dx$ $\quad f)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx$

$g)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$ $\quad h)\ \int_{-2}^{0}[\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}]dx$ $\quad i)\ \int_2^3 (x^3+x^2)dx$

$j)\ \int_{-2}^{2}[x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4]dx$ $\quad k)\ \int_0^{\pi} \sin x dx$ $\quad l)\ \int_1^2 x^2\ dx$

2- لاندې غیر معین انتګرالونه په لاس راوړئ.

$a)\ \int[\sin x+8x^3]dx$ $\quad b)\ \int[x^5+\frac{4}{x^4}+x^3+\frac{2}{x^2}+x]dx$

$c)\ \int x(1-2x^2)\,dx$ $\quad d)\ \int \sin x\,dx$

$e)\ \int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx$ $\quad f)\ \int \frac{(1-x)^2}{1-x}dx$

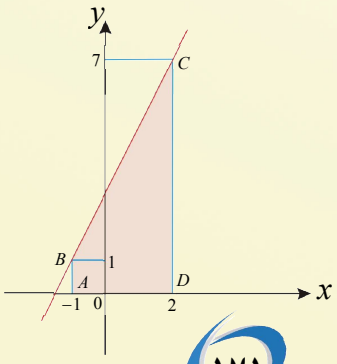
$g)\ \int \sqrt[5]{x^3}\ dx$ $\quad h)\ \int \frac{3x^2+8x}{x}dx$

$i)\ \int \left(2x^2+3\right)dx$ $\quad j)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$

$k)\ \int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3}dx$ $\quad l)\int (3x^2+4x-1)\ dx$

3- د لاندې محصور رنګ شوې سطحې مساحت د شکل له مخې پیدا کړئ.

$\int_{-1}^{2}(2x+3)\,dx$



4- لاندې انتیګرالونه د تعویضي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int 3\cos(2x+1)\,dx$

$b)\ \int \sqrt{3x+5}\,dx$

$c)\ \int \frac{2\,dx}{x+2}$

$d)\int (3x+6)^3\,dx$

$e)\int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$

$f)\int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

$g)\int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

$h)\int_0^2 x^2\cdot\sqrt{9-x^3}\,dx$

$i)\int \frac{1}{(x-10)^7}dx$

$j)\int_0^1 (1-x^2)^3 x dx$

$k)\int (4-3x)^7 dx$

$l)\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- لاندې انتیګرالونه د قسمي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int x\cos x\,dx$

$b)\ \int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx$

$c)\ \int e^x\cdot\cos x\,dx$

$d)\ \int_0^{2\pi} x\cos 3x\,dx$

$e)\ \int xe^{-x}dx$

$f)\int x\sqrt{1+x}\,dx$

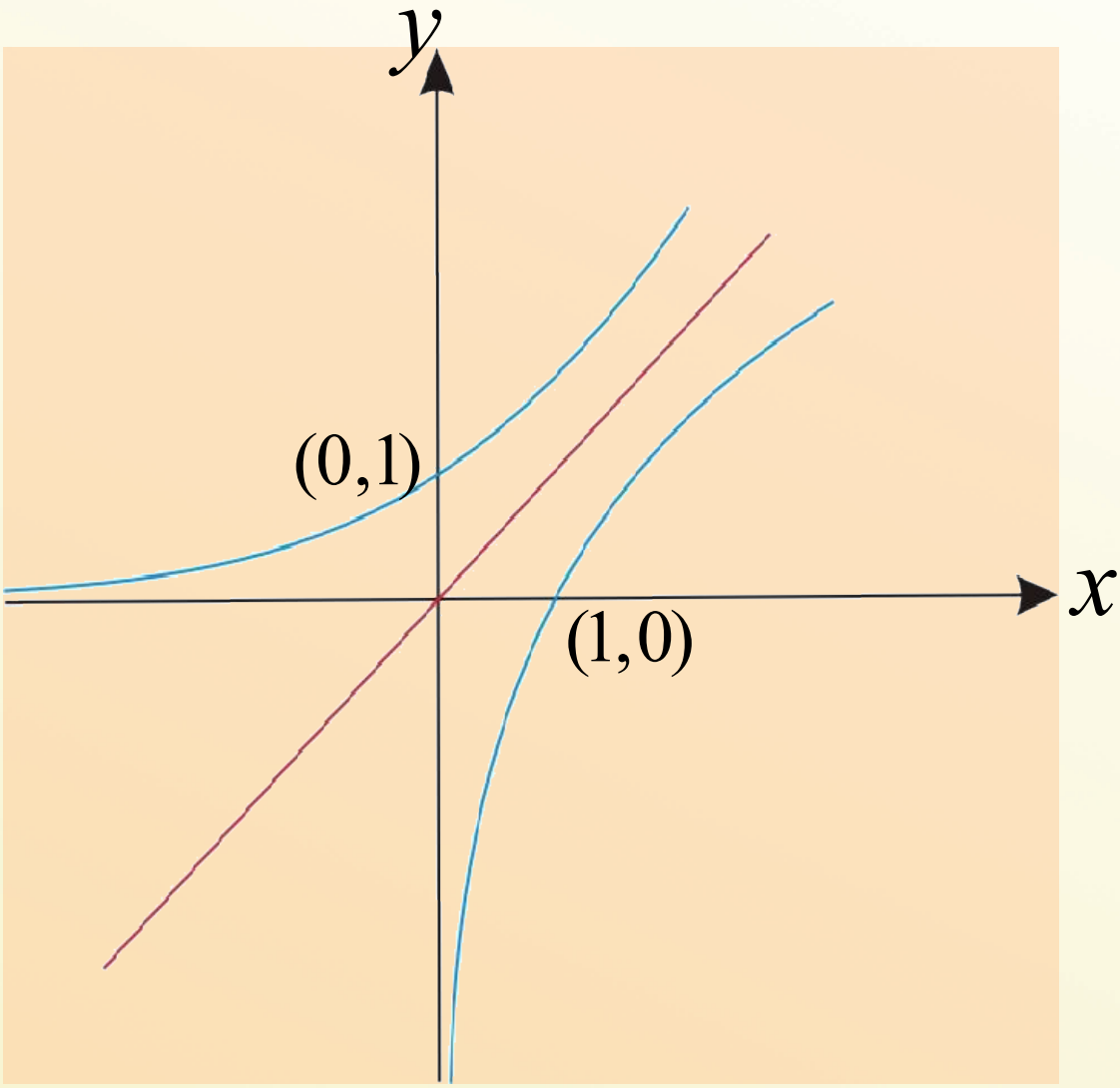
$g)\ \int x^2\cdot e^{2x}dx$

$h)\ \int e^{2x}\sin 3x\,dx$

$i)\ \int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

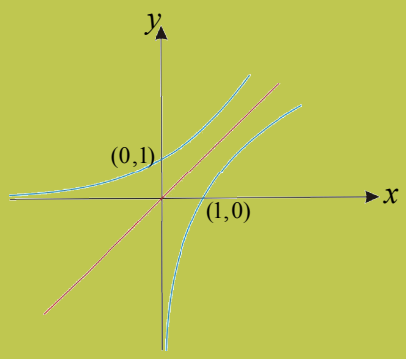
پنځم څپرکی

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانو مشتق او انتیګرال


y
x
(0,1)
(1,0)

د لوګاريتمي او اکسپوننشيل تابع ګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع ګانو ګراف راښيي، نومونه يې واخلئ.



- لوګاريتم تعريف او خواص يې وليکئ.
- لوګاريتمي او اکسپوننشيل تابع ګانې يوه له بلې سره څه اړيکې لري.
- که $\log_b x$ يوه متصله تابع وي، نو $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ له کوم عدد سره مساوي ده.
- د $y=f(x)$ د تابع له دواړو خواوو څخه طبيعي لوګاريتم ونيسئ، اړيکه يې وليکئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

په عمومي ډول که $f(x)=\ln x$ او $g(x)=a^x$ وي؛ نو $g'(x)=a^x\ln a$ او $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ دی.

ثبوت:

-1

$$y=g(x)=a^x$$

$$\ln y=\ln a^x=x\ln a$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه نظر x ته مشتق نيسو:

$$\frac{y'}{y}=x'\ln a+x(\ln a)'$$

$$\frac{y'}{y}=\ln a+0$$

$$\frac{1}{y}y'=\ln a$$

$$y'=y\ln a \quad\Rightarrow\quad g'(x)=a^x\ln a$$

-2

$$f(x)=\ln x$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(\frac{x+h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{x})\ =\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln(1+\frac{h}{x})$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ دی څرنګه چې $h\to 0$ تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ ته نژدې کېږي، لیکلای شو چې:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ \ln(1+\frac{1}{u})^{u}\ =\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}$$

پوهېږو چې $\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=e$ دی، نو: $(\ln x)'=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$

قضیه

1. که د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق منوونکی وي، نو مشتق یې $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$
2. که $f(x)=\log_a g(x)$ او $g(x)$ مشتق منوونکی وي، نو $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

ثبوت:

-1

$$f(x)=\log_a x\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

اوس که $\frac{x}{h}=u$ وضع شي، نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ کېږي، که $h\to 0$ صفر ته تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ کوي، یعنې:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}\ =\frac{1}{x}\log_a e$$

2- غواړو ثبوت کړو چې: $(\log_a g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$

د زنځیري قاعدې له مخې:

$$f'(x) = (\log_a g(x))' = (\log_a g(x))' \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \log_a e \cdot g'(x)$$

$$= \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$$

که $a = e$ وضع شي، نو لرو:

$$(\log_a g(x))' = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

پایله:

1- د Exponential تابع ګانو مشتق د لوګاریتم په مرسته کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو.

که $y = e^x$ وي ددې تابع مشتق $y' = e^x$ دی، ځکه که د $y = e^x$ رابطې څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي:

$$y = e^x \quad \Rightarrow \quad \ln y = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = (x)' \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = y \cdot 1 = e^x$$

2- که $y = e^u$ او u تابع د x وي، نو: $y' = u' e^u$

3- که $y = a^u$ کله چې $a > 0$ او $a \neq 1$ وي، نو: $y' = u' a^u \ln a$

4- د لوګاریتمي تابع ګانو د مشتق پیدا کولو لپاره په بېلابېلو قاعدو سره له دې اړیکې څخه ګټه اخلو:

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e$$

$$y' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log_e a} \quad \Rightarrow y' = \frac{u'}{u \ln a}$$

لومړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که $g(x) = x^2 + 1$ وضع کړو، نو لرو:

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(\ln(x^2 + 1))' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \quad \Rightarrow f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

دویم مثال: د $f(x)=\ln(x^2-5x+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln(x^2-5x+4) \\ g(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow g'(x)=2x-5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\ln g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2-5x+4))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4} \end{array}$$

دریم مثال: د $f(x)=\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ او $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ تابع‌ګانو مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))$$

$$(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))'$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)}\log_a e]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right]=\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

حل: پوهېږو چې $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1))$$

$$(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]'=\frac{1}{2}[(\ln(x^2+1))'-(\ln(x^2-1))']$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1})=\frac{-2x}{x^4-1}$$

څلورم مثال: د $y = e^{(x^2+1)}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې که $y = e^u$ وي نو $y' = u'e^u$

$$y = e^{(x^2+1)} \quad \Rightarrow \quad y' = (x^2+1)' \cdot e^{x^2+1} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y = \sqrt[x]{2}$ تابع مشتق په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې که چېرې $y = a^u$ وي، نو $y' = u'a^u \ln a$ سره دی، نو:

$$y = \sqrt[x]{2} = (2)^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad y' = (\frac{1}{x})' \cdot 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 = \frac{-1}{x^2} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2$$

شپږم مثال: د $y = x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که د معادلې له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي چې:

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x}$$

$$\ln y = 2x \ln x$$

$$(\ln y)' = (2x \ln x)' \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = 2(\ln x + 1) \cdot y \quad \Rightarrow \quad y' = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

اووم مثال: د $y = 10^x$ تابع مشتق حساب کړئ.

حل: پوهېږو چې $y = a^x \quad \Rightarrow \quad y' = a^x \ln a$ دی، نو:

$$y = 10^x$$

$$y' = 10^x \cdot \ln 10$$

اتم مثال: د $y = e^{3x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که $u = 3x$ وضع شي، نو: $u'(x) = 3$

$$y = e^u$$

$$y' = e^u \cdot u' = e^{3x} \cdot 3$$

$$y' = 3e^{3x}$$

نهم مثال: د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = \log(x^4 + 1)$ 2) $y = \log_3(\log_2 x)$ 3) $y = \log_{x^2-1} x^2 + 1$

حل: پوهېږو چې د لوګارتمي توابعو مشتق په مختلفو قاعدو سره د لاندې قضیې څخه په ګټه اخېستنې سره په لاس راوړو:

$$y=\log_a u$$

$$y'=(\log_a u)'=\frac{u'}{u}\log_a e=\frac{u'}{u\log_e a}=\frac{u'}{u\ln a}$$

$$1)\ \ y=\log(x^4+1)\ \ \Rightarrow\ y'=\frac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$$

$$2)\ \ y=\log_3(\log_2 x)\ \ \Rightarrow\ y'=\frac{(\log_2 x)'}{\ln 3\log_2 x}=\frac{\frac{1}{x\ln 2}}{\ln 3\log_2 x}=\frac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x\log_2 x}$$

$$=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\log_e x}{\log_e 2}}=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}}=\frac{1}{\ln 3\,x\ln x}$$

$$3)\ \ y=\log_{x^2-1}x^2+1=\frac{\log_e(x^2+1)}{\log_e(x^2-1)}=\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2-1)}$$

پوهېږو چې $y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}\ \Rightarrow\ y=\frac{u}{v}$ **دی؛ نو لرو:**

$$y'=\frac{\frac{2x}{x^2+1}\cdot\ln(x^2-1)-\frac{2x}{x^2-1}\ln(x^2+1)}{\left[\ln(x^2-1)\right]^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

$a)\ \ f(x)=\ln\sin 3x$

$b)\ \ f(x)=\ln\sqrt{3x^2+7}$

$c)\ \ f(x)=\ln(5x^2-6x+5)$

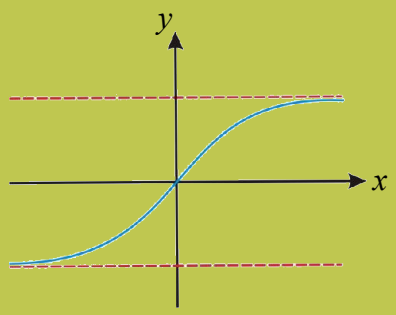
$d)\ \ f(x)=\log_{10}3x^2$

$e)\ \ f(x)=y=x^x$

$f)\ \ y=\frac{(x+1)^2(\sqrt{x-1})}{(x+4)^3e^x}$

د معکوسو تابع گانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع گراف راښيي؟



کـه چېـرې f او g يـوه د بلـې دوې معکوسـې تـابع گـانې وي، يعنـې $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي، نـو:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ يا $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ دی، ځکه چې د تابع او ضمني تابع گانو له مشتق څخه ليکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(y) \end{array}\right\} \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = y'_y \quad \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = 1 \quad \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

مثال: د $y = a^x$ تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع په مرسته پيدا کړئ.

حل:

$$y = a^x \quad \Rightarrow x = \log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a = y \log_e a$$

$$y' = a^x \ln a$$

د مثلثاتي معکوسو تابع گانو مشتق

د مثلثاتي معکوسو تابع گانو مشتق د لاندې اړيکو په مرسته لاسته راوړو:

1) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

4) $(arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

ثبوت:

1) $y = arc\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$

$(arc\sin x)' = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$

$(arc\cos x)' = ?$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y$

$$\Rightarrow (arc\tan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

دکسر صورت او مخرج په $\cos^2 y$ ویشو:

$$(arc\tan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

4) $y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$(arc\cot x)' = ?$

$$(arc\cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخرج په $\sin^2 y$ وېشو:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

لومړی مثال: د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

دویم مثال: د $y = \log_5(\arctan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = [\log_5(\arctan x)]' = (\log_5 u)' = \frac{u'}{u\log_5 e}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x \log_5 e} = \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

دریم مثال: د $y = arc\tan e^x$ تابع د مشتق مقدار د $x = 0$ ټکي کې پیدا کړئ.

$$y' = [arc\ \tan e^x]' = (arc\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

پوښتنې

1. د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y=(arc\sin x)^3$

2) $y=\log_2(arc\cos x)$

قسمي کسرونه

د یو کسر تجزیه کول په قسمي کسرونو:

پـوهېږو چـې د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ د جمعـې حاصـل $\frac{2x-1}{x^2-1}$ دی، آیا کولای شئ چې لـه دې کسر څخـه د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ کسرونه لاسته راوړئ.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

- د $\frac{7}{x+1}$ ، $\frac{5}{x-2}$ او $\frac{2}{x-5}$ کسرونه سره جمع کړئ.
- د پورته کسرونود جمعې حاصل، بېرته په لومړنیو کسرونو واړوئ.
- واقعي کسرونه څه ډول کسرونه دي، تعریف یې کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوي وي، که چېرې هغوی سره جمع کړو، راکړل شوی واقعي کسر به په لاس راشي، نو دا جمع شوي لومړني کسرونه د قسمي کسرونو په نامه یادېږي.

د یوه واقعي کسر د تجزیه کولو لپاره لاندې حالتونه په پام کې نیسو:

لومړی حالت:

که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ناطق کسر مخرج ($P_n(x)$) له خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ شوي وي او تکرار نه وي په لاندې بڼه بدلېدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{N}{x-x_n}$$

(A, B, C .... حقیقي عددونه دي)

لومړی مثال: د $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: د مخرج پولینوم په لومړنیو ضربي عواملو تجزیه کوو، نو په لاس راځي:

$$x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$$

لیدل کېږي چې نوموړی کسر له درو قسمي کسرونو څخه جوړ شوی دی، صورتونه یې A , B , C ټاکو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

لیدل کېږي چې د دواړو خواوو د کسرونو مخرجونه سره برابر دي، نو باید صورتونه هم سره برابر وي، نو د مطابقت د خواصو(د ورته حدونو ضریبونه سره مساوي وي) څخه په ګټه اخستنې سره لیکو:

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ A-3B-6C=-1 \\ -2A-10B+5C=-39 \end{cases}$$

د پورته سیستم له حل څخه وروسته $A=2$, $B=3$ او $C=-1$ په لاس راځي، نو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دویم مثال: د $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: لومړی نوموړی کسر په واقعي کسر بدلوو او بیا پورتنۍ طریقه پرې تطبیقوو:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8} \Rightarrow \frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$$

$$=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=4 \\ 2A-4B=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow A=\frac{5}{2} \quad , \quad B=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

دویم حالت:

که د کسر د مخرج ضربي عوامل لومړی درجه پولینوم وي چې ځینې یې تکرار راغلی وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې په مخرج کې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{N}{(x-x_0)^n}$$

لومړی مثال: د $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ واقعي کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ:

حل: د مخرج د پولینوم ضربي عوامل په لاس راوړو:

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x-2)(x-1)$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3x^2-6x+2}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+B=3\\-2A-3B+C=-6\\A+2B-2C=2\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}A=2\\B=1\\C=1\end{array}$$

$$\Rightarrow\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دریم حالت:

که د مخرج ضربي عوامل دویمه درجه پولینوم چې د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم د یو قسمي کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.

لومړی مثال: د $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: د مخرج پولینوم ضربي عوامل عبارت دی له:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

څرنګه چې د x^2+2x+4 درې جملهيي د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، نو په دې ساحه کې د تجزيې وړ نه ده. له دې امله ليکو:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+C=5\\A+B+2C=8\\B+4C=9\end{array}\right\}\Rightarrow\quad\begin{array}{l}A=3\\B=1\\C=2\end{array}\Rightarrow\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

پوښتنې

لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

-1

$a)\ \dfrac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $\quad b)\ \dfrac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$ $\quad c)\ \dfrac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-9x+3}$

-2

$a)\ \dfrac{1}{x^4(x+1)}$ $\quad b)\ \dfrac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ $\quad c)\ \dfrac{x^4+1}{x^2(x-1)}$

$d)\ \dfrac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $\quad e)\ \dfrac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

-3

$a)\ \dfrac{3x+7}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$ $\quad b)\ \dfrac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$

$c)\ \dfrac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$ $\quad d)\ \dfrac{x^5}{x^4-1}$

د اکسپوننشل تابع ګانو انتیګرالونه

مخامخ اړیکې سره پرتله کړئ.

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$

فعالیت

- د $f(x) = a^x$ تابع څه ډول تابع ده، نوم یې واخلئ.
- د لوګاریتمي تابع یوه بېلګه ولیکئ.
- د $\log_a x = C$ اړیکه په اکسپوننشیل ډول ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لیکلای شو چې:

د $f(x) = e^x$ طبیعي اکسپوننشیل تابع لپاره لرو $\int e^x dx = e^x + C$ نو په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \ a \neq 1 \quad , \ a \in IR^+$$

ثبوت: له تعویضي طریقې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$u = a^x$$

$$du = \ln a \cdot a^x dx$$

$$dx = \frac{du}{\ln a \cdot a^x} = \frac{du}{u \ln a}$$

$$\int a^x dx = \int u \frac{du}{u \ln a} = \frac{1}{\ln a} \int dx$$

$$\frac{1}{\ln a} u = \frac{1}{\ln a} a^x = \frac{a^x}{\ln a} \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

لومړی مثال: د $f(x)=2^{x-3}$ اکسپوننشیل تابع انتیګرال غواړو پیدا کړو:

د توان له قانون څخه لرو:

$$2^{x-3}=\frac{2^x}{2^3}=\frac{1}{8}2^x$$

$$\int 2^{x-3}dx=\int\frac{1}{8}2^x dx=\frac{1}{8}\int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8}\int 2^x dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

دویم مثال: دلاندې اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 3^{x+1}dx=?$ 2) $\int 6^{x-1}dx=?$

حل:

1) $\int 3^{x+1}dx=?$

$$3^{x+1}=3^x\cdot 3$$

$$\int 3^x\cdot 3\,dx=3\int 3^x dx=3\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C$$

2) $\int 6^{x-1}dx=?$

$$6^{x-1}=\frac{6^x}{6}=\frac{1}{6}\cdot 6^x$$

$$\int\frac{1}{6}6^x dx=\frac{1}{6}\int 6^x dx=\frac{1}{6}\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+C$$

پوښتنې

د لاندې اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\ \int 3^{x-1}dx$ $b)\ \int 2^{-x}dx$ $c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int\frac{1}{a^x}dx$ $e)\ \int 2^x\cdot 3^x dx$ $f)\ \int\frac{2^x}{3^x}dx$

$g)\ \int\frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ $h)\ \int\frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ $i)\ \int(1+2^x)dx$

د لوګاریتمي تابع ګانو انتیګرال

وښیئ چې د تابع په کوم حالت کې نزولي او په کوم حالت کې صعودي ده.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$

فعالیت

- لوګاریتم په څو ډوله دی، د هر ډول عمومي رابطه ولیکئ.
- د $x = a^y$ او $y = \log_a x$ معادلې یو له بل سره څه اړیکه لري.
- د $x = b^y$ او $y = \log_b x$ تابع ګانو ګراف رسم کړئ.
- آیا کولای شو چې د لوګاریتمي تابع ګانو انتیګرال ونیسو؟

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

که $(x \in IR^+)$ $f(x) = \ln x$ وي د طبیعي لوګاریتم د تابع لپاره لیکلای شو: $\int \ln dx = x \cdot \ln x - x + C$

که $(x, a \in IR^+, a \neq 1)$ $f(x) = \log_a x$ وي د معمولي لوګاریتم تابع لپاره لیکلای شو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي، نو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\, dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

-2

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \quad , \quad du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$dv = dx \quad , \quad v = x$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$= x\log_a x - \log_a e\int dx$$

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x\,dx = x\,\log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیگرال غواړو پیدا کړو:

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3\,dx + \int \ln x\,dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x$$

$$= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

یادونه:

(I) د تعویض Substitution له لارې کولای شو د غیرمعین انتیگرال حل پیدا کړو.

لومړی مثال:لاندې انتیگرالونه پیدا کړئ.

حل:

$$a)\quad I = \int \frac{1}{2}e^{-2x-3}dx$$

$$-2x-3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$I = \int \frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^{u}du = -\frac{1}{4}e^{u} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x-3} + C$$

$$b)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x+2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

دویم مثال: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیگرال ونیسئ:

حل:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

$$u=2x \Rightarrow du=2dx$$

$$dx=\frac{du}{2}$$

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{e^{u}}{2}+C=\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

آزمایښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

دریم مثال: د $f(x)=x\cdot\ln x^{2}$ انتیگرال حساب کړئ.

حل:

$$f(x)=x\cdot\ln x^{2} \Rightarrow \int f(x)dx=\int (x\cdot\ln x^{2})dx=?$$

$$u=x^{2}$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int \ln u\,du=\frac{1}{2}[u\cdot\ln u-u+C]=\frac{1}{2}u\cdot\ln u-\frac{1}{2}u+C$$

$$=\frac{1}{2}x^{2}\cdot\ln x^{2}-\frac{1}{2}x^{2}+C$$

(II) معین انتیگرالونه هم د بدلون(تعویض) له لارې حل کېږي.

لومړی مثال: د $\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$ انتیگرال پیدا کړئ.

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

$$u=2x \Rightarrow du=2\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1,\ u=2x \Rightarrow u=2(-1)=-2 \\ x=1,\ u=2x \Rightarrow u=2(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}\,du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=3.627$$

دویم مثال: د $f(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx$ انتیگرال قیمت پیدا کړئ.

$$u=x^2$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1\ ,\quad u=x^2=1 \\ x=2\ ,\quad u=x^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx=\int_1^4 2x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4 \ln u\,du$$

$$=\left[u\cdot\ln u-u\right]_1^4=\left[4\cdot\ln 4-4\right]-\left[1\cdot\ln 1-1\right]\approx 2.545$$

پوښتنې

لاندې انتیگرالونه حل کړئ.

$a)\ \int \ln 2x^3 dx$ $\qquad b)\ \int \ln\sqrt{x}\,dx$ $\qquad c)\ \int \log\frac{x}{2}dx$

$d)\ \int 3\log\frac{1}{x}dx$ $\qquad e)\ \int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}dx$

د قسمي کسرونو په مرسته د انتیګرال محاسبه

د مخامخ کسر قسمي کسرونه پیدا کړئ.

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{?}{(x-2)}+\frac{?}{(x-1)}$$

مخکې مو د قسمي کسرونو تجزیه مطالعه کړه اوس غواړو چې د هغو تابع ګانو انتیګرالونه د قسمي کسرونو په واسطه تر څېړنې لاندې ونیسو.

لومړی مثال: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx$ محاسبه کړئ.

حل: د قسمي کسرونو د تجزیې په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-4)}$$

$$\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)}=\frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$A+B=7$$

$$-4A-2B=-12$$

$$A=7-B$$

$$-4(7-B)-2B=-12$$

$$-28+4B-2B=-12$$

$$-28+2B=-12$$

$$2B=16 \quad \Rightarrow \quad B=8$$

$$A=7-8=-1$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$

نو لیکلای شو چې:

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{8}{x-4}dx$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int\frac{1}{x-2}dx+8\int\frac{1}{x-4}dx$$

$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$

$$=\ln\left[(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\right]=\ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right]+C$$

دویم مثال: د $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6}dx$ انتیگرال محاسبه کړئ.

حل: مخرج په فکتورونو تجزیه کوو: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

نو:

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

$$\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)}=\frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}$$

$$(A+B)x+3A-2B=-5x+9$$

$$A+B=-5 \Rightarrow A=-5-B$$

$$3A-2B=-5x+9$$

د A او B عددي قیمتونه عبارت دي له:

$$3(-5-B)-2B=9$$

$$-15-5B=9$$

$$-5B=24$$

$$B=-\frac{24}{5}$$

$$A=-5+\frac{24}{5}=\frac{-25+24}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}-\frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\int \frac{-\frac{1}{5}}{x-2}dx-\int \frac{\frac{24}{5}}{x+3}dx=-\frac{1}{5}\int \frac{1}{x-2}dx-\frac{24}{5}\int \frac{1}{x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{5}\ln(x-2)-\frac{24}{5}\ln(x+3)$$

$$=\ln(x-2)^{-\frac{1}{5}}+\ln(x+3)^{-\frac{24}{5}}=\ln\left[(x-2)^{-\frac{1}{5}}\cdot(x+3)^{-\frac{24}{5}}\right]+C$$

پوښتنې

لاندې انتیگرالونه د قسمی کسرونو په طریقه حل کړئ.

$a)\ \int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx$ $\quad b)\ \int \frac{x-2}{x^2-6x+5}dx$ $\quad c)\ \int \frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx$

د څپرکي مهم ټکي

- که $f(x)=e^x$ وي، نو ددې تابع مشتق عبارت له $f'(x)=e^x$ دی.
- که $f(x)=a^x$ وي، د دې تابع مشتق $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ دی.
- که $f(x)=\log_a x$ وي، نو د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$ دی.
- $f(x)=\log_a g(x)$ وي، نو د تابع مشتق $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$ دی.
- **قسمي کسرونه**: د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوي دي که هغوی جمع کړو، راکړل شوي واقعي کسر په لاس راځي، قسمي کسرونه بلل کېږي.
- که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د کسري پولینوم مخرج ($P_n(x)$) د خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړوي چې تکرار نه وي راغلی په لاندې بڼه بدلیدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{N}{x-x_n}$$

- که د لومړی درجه پولینوم مخرج ضربي عوامل چې ځینې یې تکرار راغلي وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{N}{(x-x_0)^n}$$

- که د مخرج ضربي عوامل دویمه درجه پولینوم د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم یو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.
- د اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int e^x dx=e^x+C \quad , \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad , \quad (a\in IR^+\ ,\ a\neq 1)$$

- د لوګارتمي توابعو د انتیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C \quad , \quad \int \log_a x\,dx=x\log_a\frac{x}{e}+C$$

- ځینې تابع ګانې چې پرته د بدلون له لارې حل کېږي، لیکو:

$$f(x)=e^x \quad \Rightarrow \quad \int f(x)\,dx=\int e^x\,dx=e^x+C$$

د پنځم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\ln(\frac{x-2}{x+2})$ د تابع مشتق پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
3. د $y=2x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
4. د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
5. لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

1) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ 2) $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ 3) $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6. لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 5t^7dt$ 2) $\int \frac{x^3-3}{x^2}dx$

3) $\int (2\cos x-5\sin x+e^x)dx$ 4) $\int \sqrt{\cos x}\sin xdx$

5) $\int xe^{-x}dx$ 6) $\int (\frac{5}{(2x+1)(x-2)})dx$

7) $\int_{-1}^{1}3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

7 – د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

$a)\ y=\ln(x^2+x+1)$ $b)\ y=\ln(\sin x)$

$c)\ y=e^{x^2+1}$ $d)\ y=\sqrt[x]{2}$

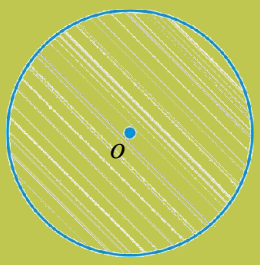
شپږم څپرکی

د انتیګرال تطبیقات

د منحني گانو پواسطه د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by one curve

د مخامخ شکل مساحت چې یوه سطحه د یوې منحني په واسطه تړل شوې دایره ده. د مساحت فورمول یې وویاست.



فعالیت

د $y=1-x^2$ تابع په پام کې ونیسئ.

- د تابع بحراني(*Critical Point*) ټکي او د x محور سره د تقاطع ټکي پیدا او گراف یې رسم کړئ.
- د $y=1-x^2$ تابع او x محور تر منځ د سطحې د مساحت قیمت د انتیگرال په مرسته پیدا کړئ.
- پورتنی فعالیت د $y=-x^2+2x$ تابع لپاره تکرار کړئ او د منحني او د x د محور تر منځ محصور شوی مساحت محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:

_ $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ انتیگرال د یوې سطحې د مساحت قیمت راښیي چې د $y=f(x)$ منحني او د x محور او د $x=a$, $x=b$ د کرښو له خوا رابند (محصور) دی.

_ که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ تړلی انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې $f(x)$ تابع گراف تل د x محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې $f(x)$ تابع گراف د x محور لاندې خواته واقع ده او منفي دی.

لومړی مثال: د $x=4-y^2$ تابع د منحني او د y د محور تر منځ محصور شوی مساحت پیدا کړئ.

حل: لومړی د تابع بحراني ټکي او د y محور سره د تقاطع ټکي پیدا کوو، وروسته یې شکل رسموو، د بحراني ټکي د پیدا کولو لپاره لومړی د تابع مشتق نیسو او له صفر سره یې مساوي کوو او له محورونو سره د تقاطع ټکو د په لاس راوړلو لپاره تابع له صفر سره برابروو.

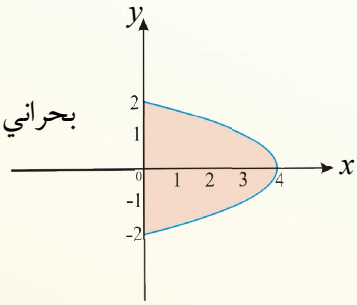
$$x = 4 - y^2 \Rightarrow x' = -2y = 0$$

$$x' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$y = 0\,, \quad x = 4 - y^2 \Rightarrow x = 4 - 0 \Rightarrow x = 4 \quad \Rightarrow \quad (4,0)$ بحراني ټکی

$x = 0 \quad , \quad 4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4$

$y = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad (0,2) \quad , \quad (0,-2)$ د محورونو سره د تقاطع ټکي



څرنګه چې د $x = 4 - y^2$ معادله په $[-2,2]$ انټروال کې نظر x محور ته دواړه ټکي متناظر دي، نو د نمایي مساحت په پام کې نیولو سره، د انتیګرال د مساحت سرحدات په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - y^2)\, dy = 2\int_{0}^{2} (4 - y^2) dy = 2[4y - \frac{y^3}{3}]_0^2$$

$$A = 2\,[(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}) - 0] = 2\,(8 - \frac{8}{3}) = 2\,(\frac{24-8}{3}) = 2\,(\frac{16}{3}) = \frac{32}{3}$$

دویم مثال: د x محور او د $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ تابع منحني د محصور شوې سطحې مساحت محاسبه کړئ.

حل: د محصور شوې سطحې د مساحت ټاکلو لپاره لومړی بحراني ټکي او د x له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو.

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 \ , \ y' = -x$$

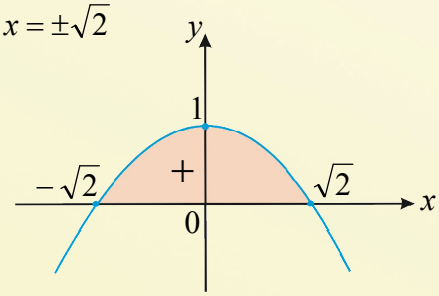
$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$x = 0,\ y = 1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - \frac{1}{2}0^2 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \Rightarrow \quad (0,1)$ بحراني ټکي

$y = 0, 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2,\ x = \pm\sqrt{2}$

$x_1 = \sqrt{2} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{2}$

$(\sqrt{2},0)\ ,\ (-\sqrt{2},0)$ له محورونو سره د تقاطع ټکي



$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2([x-\frac{1}{6}x^3]_0^{\sqrt{2}})$$

$$A=2(\sqrt{2}-\frac{(\sqrt{2})^3}{6}-0)=2(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6})=2(\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{8}}{6})$$

$$=(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3})=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A=1.8853$$

دریم مثال: د $y=x^2-3$ تابع گراف د x له محور سره یوه سطحه رابند وي، د دې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: لومړی د سطحې د ټاکلو لپاره د تابع گراف رسموو او د تابع بحراني ټکي او د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y=x^2-3\Rightarrow y'=2x$$

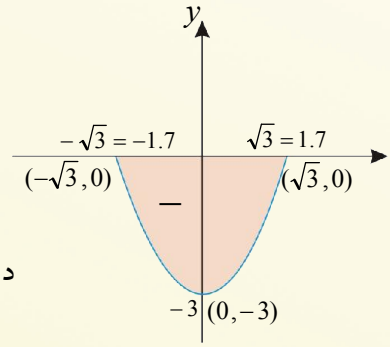
$$y'=0\Rightarrow x=0$$

$$x=0\ ,\ y=x^2-3\Rightarrow y=0^2-3$$

$\Rightarrow y=-3\Rightarrow (0,-3)$ بحراني ټکي

$$y=0\ ,\ \ x^2-3=0\Rightarrow x^2=3$$

$x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow(\sqrt{3},0)\ ,\ (-\sqrt{3},0)$ د محورونو سره د تقاطع ټکي



څرنگه چې د $y=x^2-3$ تابع په $[\sqrt{3},-\sqrt{3}]$ انټروال کې د محور سره د تقاطع ټکي متناظر قیمتونه لري، نو گراف یې د x له محور څخه لاندې دی او انتیگرال یې منفي دی، نو له ټول مساحت څخه د انتیگرال د سرحدونو نیمایي مساحت پیدا کوو اوپه 2 کې یې ضربوو:

$$A_1=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2(\int_{0}^{\sqrt{3}}x^2\,dx-3\int_{0}^{\sqrt{3}}dx)=-2([\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{3}}-[3x]_0^{\sqrt{3}})$$

$$=-2(\frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3-0]-3[\sqrt{3}-0])=-2(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3-3\sqrt{3})$$

$$=-\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3+6\sqrt{3}=-\frac{2}{3}(1.7)^3+6(1.7)=-\frac{2}{3}(4.913)+10.2=-\frac{9.826}{3}+10.2$$

$$=-3.2753+10.2=6.9247$$

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ تابع ګراف رسم د منحني او x محور تر منځ د سطحي مساحت په $[-1,4]$ انټروال کې وټاکئ.

حل: لومړی د منحني بحراني ټکی او له له محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو:

$$y = x^2 - 3x$$

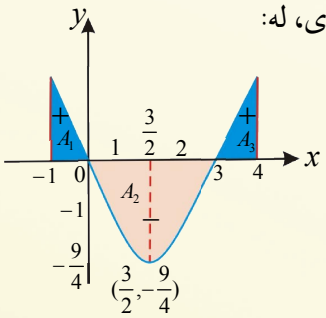
$$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \ , \ x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \ , \quad y = x^2 - 3x \Rightarrow y = (\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2})$$

$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} \ , \quad (x,y) = (\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$$ بحراني ټکی

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو د $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ ټکي د تابع مطلق اصغري ټکي دي او د تقاطع ټکي یې د x له محور سره عبارت دی، له:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$
$$\Rightarrow x(x-3) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3$$



$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0} (x^2 - 3x)\,dx - \int_{0}^{3} (x^2 - 3x)\,dx + \int_{3}^{4} (x^2 - 3x)\,dx$$

$$A = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{0}^{3} + [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{3}^{4}$$

$$A = [(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0) - (\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2)] - [(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2) - (\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0)] +$$
$$[(\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot(4)^2) - (\frac{1}{3}\cdot(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot(3)^2)]$$

$$= -(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9) + (\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{65 - 54}{3} + \frac{57 - 48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$

پنځم مثال: د $y = x^2 - 2x$ منحني او x محور ترمنځ مساحت د $[-1,2]$ په انتروال کې پیدا کړئ.

حل: لومړی بحراني ټکي وروسته د x له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$

$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

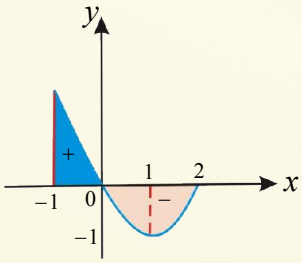
$x = 1$, $y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1,-1)$ بحراني ټکي

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو تابع د $(1,-1)$ په ټکي کې مطلق اصغري لري او د x لـه محـور سـره یـې تقاطع په لاندې ډول ده.

$$y = 0 \quad , \quad x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 2$$



څرنګه چې منحني د $[-1,2]$ په انټروال کې لـه مبـدأ څخـه تیرېـږي او د منحنـي یـوه برخـه د $[-1,0]$ پـه انټروال کې د x محور پورته خواته او بله برخه یې د $[0,2]$ په فاصلې کې د x محور ښکته خواته پرتـه ده انتیګرال یې منفي دی:

$$A = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2}(x^2 - 2x)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{0}^{2}$$

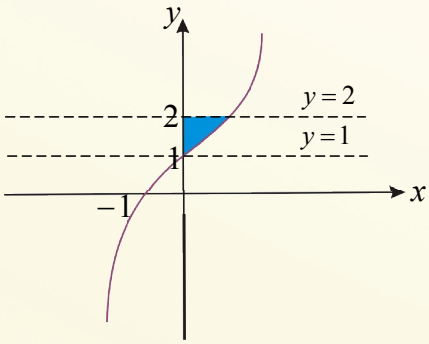
$$= (0 - (-\frac{1}{3} - 1)) - ((\frac{8}{3} - 4) - 0) = -(-\frac{1}{3} - 1) - (\frac{8}{3} - 4) = -(\frac{-1-3}{3}) - (\frac{8-12}{3})$$

$$= -(\frac{-4}{3}) - (\frac{-4}{3}) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

پوښتنې

1- د $f(x)=\sin x$ منحني او د x محور تر منځ مساحت په $[-2\pi\,,2\pi]$ انټروال کې حساب کړئ.

2- د $y=x^3+1$ تـــابع منحنـــي او $y=1$ ، $y=2$ کرښو تر منځ مساحت وټاکئ.

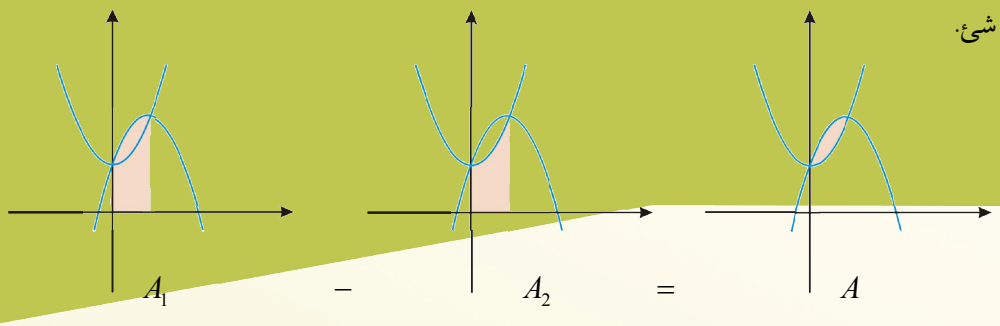


3- د $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ منحني او د $x=0$ او $x=1$ کرښو تر منځ مساحت حساب کړئ.

د دوو محصور شویو منحني ګانو تر منځ د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by tow curves

لانـــدې شـــکلونه پـــه پـــام کـــې ونیـــسئ د $A = A_1 - A_2$ اړیکـــې د ســـموالي پـــه اړه څـــه و یلای شئ.



که د $y_1 = 1 - x^2$ او $y_2 = x^2 - 1$ تابع ګانې راکړل شوی وي.

- د $y_1 = y_2$ رابطې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.
- د لاس ته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره د هغوی ګراف رسم کړئ.
- څرنګه چې د y_1 تـابع ګـراف د y_2 تـابع د ګـراف څخـه لـوړ دی، نـو د تـابع ګـانو د انتیګـرال د تفریـق حاصل $(y_1 - y_2)$ د x په ټاکل شوی انټروال کې حساب کړئ.
- نوموړی فعالیت د $y = x^2$ تـابع د منحنـي او $y = x + 2$ د کرښـې لپـاره تکـرار کـړئ او د محـصورې شوي سطحې مساحت حساب کړئ.

د پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:

ـ که چېرې د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوو منحنيګانو د محصور شوي سـطحې د محاسـبې لپـاره پـه هغه صورت کې چې $f(x) > g(x)$ وي، یعنې د $f(x)$ تـابع ګـراف د $g(x)$ تـابع دپاسـه واقـع وي، نـو لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي پیدا کوو وروسته د پاسـني او لانـدېني منحنـي د x د محـور سـره مساحت په $[a,b]$ انټروال کې محاسبه کوو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

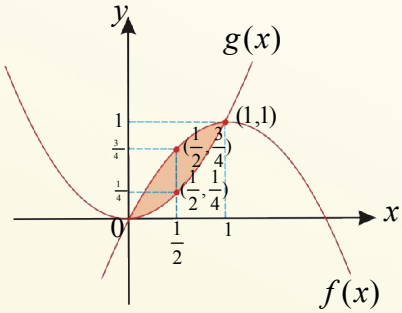
ـ که چېرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف دپاسه واقع وي، نو لرو چې:

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx=\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

لومړی مثال: د $f(x)=2x-x^2$ او $g(x)=x^2$ منحني ګانو د ګرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل: لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکی پیدا کوو:

$$f(x)=2x-x^2 \quad , \quad g(x)=x^2$$
$$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-x^2=x^2$$
$$2x-x^2-x^2=0$$
$$2x-2x^2=0$$
$$2x(1-x)=0$$
$$2x=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0$$
$$1-x=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=1$$



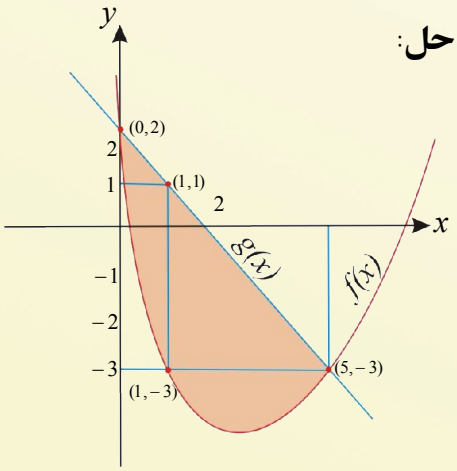
لیدل کېږي چې ددواړو منحني ګانو تقاطع (1،1) او (0،0) ده اوس د محصور شوي سطحې مساحت پیدا کوو.

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]=\int_0^1 [2x-x^2-x^2]\,dx=\int_0^1 [2x-2x^2]=[\frac{2x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}]_0^1$$
$$=[x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^1=(1-\frac{2}{3})-0=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^2-6x+2$ تابع او $g(x)=2-x$ کرښې د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-6x+2 \\ g(x)=2-x \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=g(x)$$
$$x^2-6x+2=2-x \Rightarrow x^2-6x+2-2+x=0$$
$$x^2-5x=0 \Rightarrow x(x-5)=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad x_2=5$$
$\Rightarrow (0,2)$, $(5,-3)$ د کرښې او منحني د تقاطع ټکي



له شکل څخه ښکاري چې د $g(x)$ کرښې گراف د $f(x)$ گراف پورته خوا ته واقع دی، په دې معنا چې

$g(x) > f(x)$

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx=\int_0^5 (2-x-x^2+6x-2)dx$$

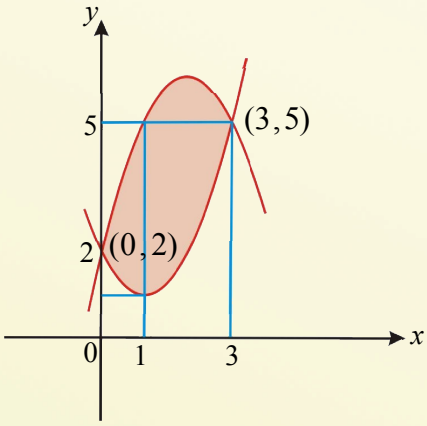
$$=\int_0^5 (-x-x^2+6x)\,dx=\int_0^5 (-x^2+5x)\,dx$$

$$=[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}]_0^5=(-\frac{125}{3}+5\cdot\frac{25}{2})-0=-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}$$

$$=\frac{-250+375}{6}=\frac{125}{6}$$

دریم مثال: د $f(x)=-x^2+4x+2$ او $g(x)=x^2-2x+2$ تابع گانو د گرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې د دواړو گرافونو د تقاطع ټکي د انتیگرال حدونه جوړوي، نو د دې ټکو د پیدا کولو لپاره $f(x)=g(x)$ وضع کوو:



$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+4x+2 \\ g(x)=x^2-2x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=g(x)$$

$$-x^2+4x+2=x^2-2x+2$$

$$\Rightarrow -x^2+4x+2-x^2+2x-2=0$$

$$-2x^2+6x=0 \Rightarrow x(-2x+6)=0$$

$$\Rightarrow x_1=0 \quad , \quad -2x=-6 \Rightarrow x_2=3$$

د دواړو منحني گانو د تقاطع ټکي $(0,2)$, $(3,5)$

د x له محور سره د تقاطع ټکی عبارت له (3،5)، (0،2) دی اوله شکل څخه لیدل کېږي چې د $f(x)$ گراف د $g(x)$ له گراف څخه پورته واقع دی، نو لرو:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_0^3 (-x^2+4x+2)dx-\int_0^3 (x^2-2x+2)dx$$

$$=[-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+2x]_0^3-[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+2x]_0^3$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot 27+2\cdot 9+6-0-\frac{1}{3}\cdot 27+9-6+0$$

$$=-9+18-9+9=9$$

پوښتنې

1- د $y = x^2$ او $y = -x^2 + 4x$ منحني ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

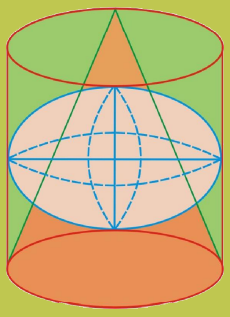
2- د $y^2 = 2x - 2$ پارابول او $y = x - 5$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت حساب کړئ.

3- د $y^2 = 2x + 6$ منحني او $y = x - 1$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ.

دگراف له دوران څخه د په لاس راغلې جسم حجم

Accounting of rounding things Volume

د مخامخ شکل د جسمونو د حجمونو **تر منځ نسبت پیدا کړئ.**

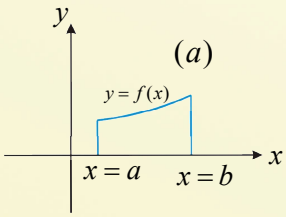


په مخکنیو ټولګیو کې مو د جسمونو حجم پیدا کړی وو. پرته له دې چې د هغوی فورمولونه ثبوت شي منلي مو وو، خو اوس د جسمونو د حجم فورمولونه د معین انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره ثبوتوو.

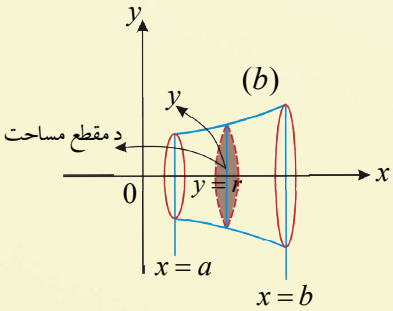
- یو ټکی او یوه کرښه په فضا کې داسې په پام کې ونیسئ چې ټکی د کرښې په منځ کې واقع وي.
- هغه جسم چې د یوې مستقیمې کرښې له دوران څخه د یوه ټکي په شاوخوا لـه څرخېـدو وروسـته جـوړېږي، نوم یې واخلئ.
- د نوموړی جسم د حجم فورمول ولیکئ او ووایئ چې هغه څنګه ثبوتوو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

- که چېرې د $y = f(x)$ متمادي تابع د منحني مساحت نظر (a) شکل ته



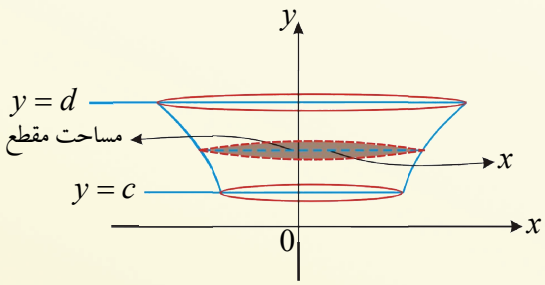
د $x = a$ او $x = b$ کرښـو او منحنـي پـه واسـطه محـصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوارن څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه یې شکل لري، لکه د (b) شکل.



چې ارتفاع يې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دايروي شکل په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وايي او پوهېږو چې د دايرې مساحت نظر x محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع شکل ته په کتو سره د y محور سره موازي ده، نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول يې نظر ريمان مجموع ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2\, dx = \int_a^b \pi y^2\, dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2\, dx$$

- که د $x = f(y)$ تابع د منحني مساحت $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې د مقطع مساحت نظر y محور ته $A(y) = \pi r^2$ دی چې ارتفاع يې $\Delta y = d - c$ او شعاع يې $x = r$ سره ده هغه حجم چې له دې دوران څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:



$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2\, dy = \int_a^b \pi x^2\, dy = \int_a^b \pi [f(y)]^2\, dy$$

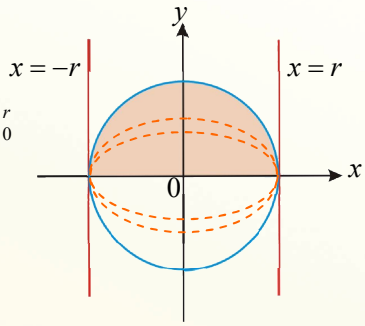
د دوراني جسمونو حجم د انتيگرال په مرسته په لاس راځي، لکه:

1- د انتيگرال په مرسته د کرې حجم پيدا کړئ.

ثبوت: پوهېږو چې که چېرې نيمه دايره د خپل قطر په شاوخوا وخرخي کره لاس ته راځي او د دايرې معادله $x^2 + y^2 = r^2$ ده، اوس د نيمې دايرې حجم له خرخېدو وروسته په لاس راوړو او هغه دوه برابره کوو چې د دايرې بشپړ حجم په لاس راشي

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$



$$= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi [r^2 x - \frac{x^3}{3}]_0^r$$

$$= 2\pi [(r^3 - \frac{r^3}{3}) - 0]$$

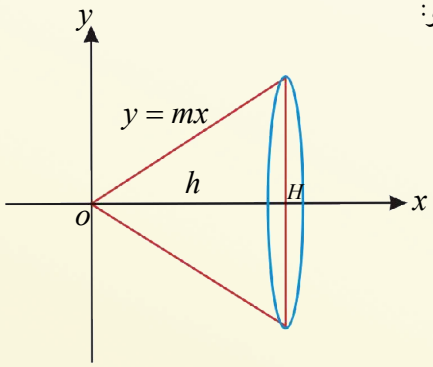
$$= 2\pi (\frac{3r^3 - r^3}{3})$$

$$= 2\pi (\frac{2r^3}{3})$$

$$V\,(\text{د کرې حجم}) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2- د انتیگرال په مرسته د مخروط حجم پیدا کړئ.

ثبوت: څرنګه چې مخروطي سطح د $y = mx$ کرښې له دوران څخه د x د محور په چاپېریال په لاس راځي نو:



$$V = \int_0^h \pi\, y^2 dx$$

$$= \int_0^h \pi\, m^2 x^2 dx = \pi\, m^2 \int_0^h x^2 dx$$

$$= \pi\, m^2 [\frac{x^3}{3}]_0^h = \pi\, m^2 (\frac{h^3}{3})$$

$$= \frac{\pi\, h}{3} (mh)^2$$

له پورته شکل څخه لیدل کېږي چې د مخروط قاعده دایروي بڼه لري اوشعاع یې د h محور سره موازي ده، یعنې $y // r$ او همدا رنګه د مخروط ارتفاع (h) د x په محور باندې منطبق ده، $(x = h)$ نو د $y = mx$ په اړیکه کې یې قیمت وضع کوو:

$$y = mx \quad \Rightarrow \quad r = mh$$

$$= \frac{\pi h}{3} \quad r^2$$

$$V = \pi\, r^2 \times \frac{h}{3}$$

څرنګه چې د مخروط قاعده دایروي ده، د دایرې مساحت πr^2 دی، لرو چې:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V(\text{د مخروط حجم}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

3- د الپس حجم چې د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ د منحني او x محور په چاپیر د لوی قطر په شاوخوا له دوران وروسته جوړېږي، په لاس راوړئ.

ثبوت: د الپس د نیمایي حجم د لوی قطر په شاوخوا په لاس راوړو او هغه دوه چنده کوو چې د بشپړ الپس حجم په لاس راشي.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

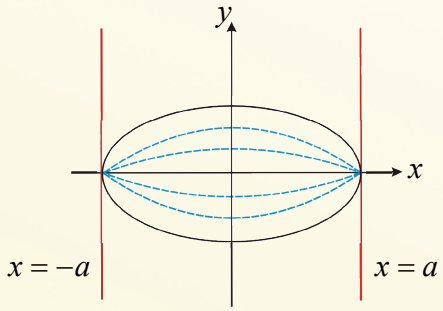
$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V = \int_{-a}^{a} \pi y^2\, dx = \pi \int_{-a}^{a} [b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{a} [b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx = 2\pi[b^2 x - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}]_0^a$$

$$= 2\pi[(b^2 a - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}) - 0] = 2\pi[b^2 a - \frac{b^2 a}{3}]$$

$$= 2\pi[\frac{3b^2 a - b^2 a}{3}] = 2\pi[\frac{2b^2 a}{3}]$$



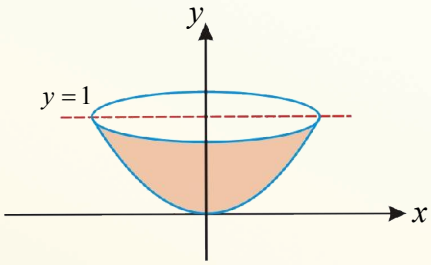
$$V = \frac{4}{3}\pi b^2 a \Rightarrow \text{د الپس دوران د لوی قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

که چېرې د الپس محراقونه د y په محور پراته وي او د هغه انتګرال حساب کړو د الپس د کوچني قطر په شاوخوا حجم په لاندې ډول په لاس راځي:

$$\text{د الپس دوران د کوچني قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

لومړی مثال: د هغه جسم حجم چې د $y = x^2$ او $y = 1$ کرښې تر منځ پرتې مستوي مساحت د دوران څخه د y په محور په لاس راځي، پیدا کړئ.

حل: لومړی شکل رسموو وروسته یې مساحت حسابوو:

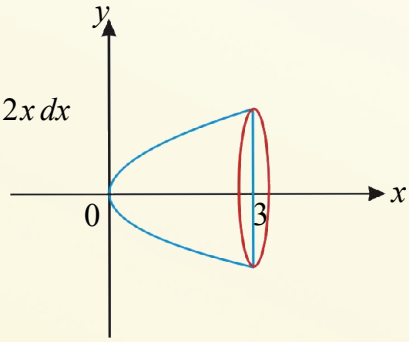


$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y\, dy = \frac{1}{2}\pi y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$

دویم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ تابع او $y = 3$ کرښې ترمنځ د څرخیدلی جسم مساحت پیدا کړئ.

حل:



$$V = \int_a^b \pi\, y^2 dx = \int_0^3 \pi[\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 [\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 2x\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x\, dx = 2\pi[\frac{x^2}{2}]_0^3$$

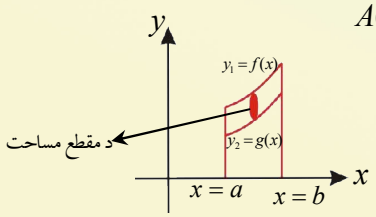
$$V = 9\pi$$

یادونه: که د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی د هغه دوراني جسم حجم د $f(x)$ او $g(x)$ منحني ګانو او د $x = a$ ، $x = b$ کرښو تر منځ جوړېږي له لاندې رابطې څخه لاسته راځي:

$\Delta x =$ د استوانې ارتفاع

$A(x) =$ (د استوانې د مقطع مساحت) $= \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$

د هغې استوانې د حجم فورمول چې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع ګراف څخه پورته قرار لري.



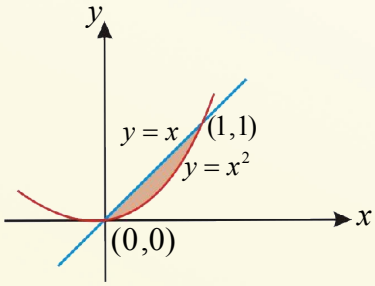
$$V = \int_a^b \pi(y_1^2 - y_2^2)\, dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\, dx$$

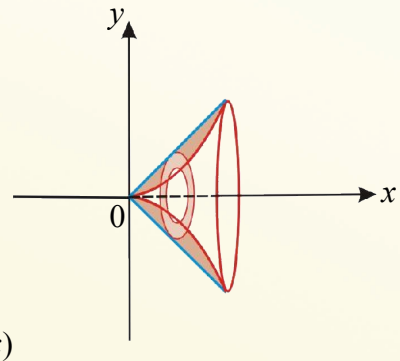
د هغې استواني د حجم فورمول چې د $g(x)$ تابع گراف ، د $f(x)$ گراف څخه پورته واقع وي.

$$V=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y=x^2$ منحني او $y=x$ کرښې تر منځ د پرتې سطحې مساحت له دوران څخه د x محور په شاوخوا په لاس راځي، محاسبه کړئ.

حل:





$$\left.\begin{array}{l} y_1=x^2=f(x) \\ y_2=x=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow y_2>y_1\ ,\ \ g(x)>f(x)$$

$$=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\int_0^1 \pi(x^2-(x^2)^2)dx$$

$$=\pi\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx=\pi[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}]_0^1$$

$$=\pi[(\frac{1}{3}-0)-(\frac{1}{5}-0)]=\pi[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}]$$

$$V=\pi[\frac{5-3}{15}]=\pi[\frac{2}{15}]=\frac{2\pi}{15}$$

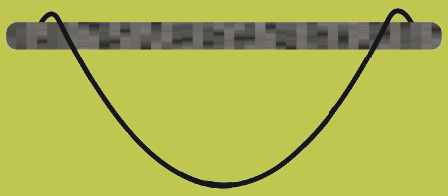
پوښتنې

1. د هغه جسم حجم چې د $y=\sin x$ تابع او د $x=0$ او $x=\pi$ دوو کرښو تر منځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د x د محور په چاپېر جوړېږي پیدا کړئ.
2. د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y=x^3$ منحني او $y=8$ ، $x=0$ کرښو ترمنځ محصور شوي مساحت له دوران څخه د y د محور په چاپېر جوړېږي، حساب کړئ؟

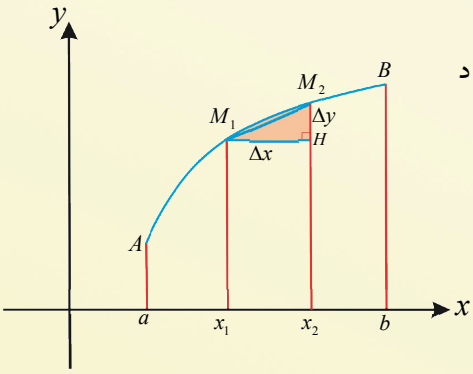
د قوس د اوږوالی محاسبه

Accounting the Length of Arc

خرنګه کولای شو چې د مخامخ پړي اوږدوالی پیدا کړو؟



- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ او هغې ته $\overset{\frown}{AB}$ ووایې، داسې چې تابع په نوموړی فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي.
- د $[a,b]$ انټروال په دریو مساوي برخو ویشو او د x_1 او x_2 د قوس اوږدوالی په M_1 او M_2 ښیو.
- د M_1 له ټکي څخه یوه ټوټه کرښه د M_2 په ټکي او یوه بله کرښه، د هغې په مخامخ کرښه رسموو او د دواړو ټوټه کرښو، د تقاطع ټکی H ونوموئ.
- د M_1H د کرښې فاصلې ته Δx او M_2H ته Δy وایي او د M_1HM_2 د قایم الزاویه مثلث د مخامخ قوس اوږوالی د فیثاغورث د قضیې په مرسته حساب کړئ.



له پورتني فعالیت څخه کولای شو چې د M_1HM_2 مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی داسې ثبوت کړو.

ثبوت:

له قایم‌الزاویه M_1HM_2 مثلث څخه په ګټې اخیستنې سره لرو چې:

$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق له تعریف څخه پوهېږو:

$$f'(t)=\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad g'(t)=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x=f'(t)\cdot\Delta t \quad , \quad \Delta y=g'(t)\cdot\Delta t$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{[f'(t)\cdot\Delta t]^2+[g'(t)\cdot\Delta t]^2}$$

$$M_1M_2=\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

نو د ریمان له مجموعې څخه لرو:

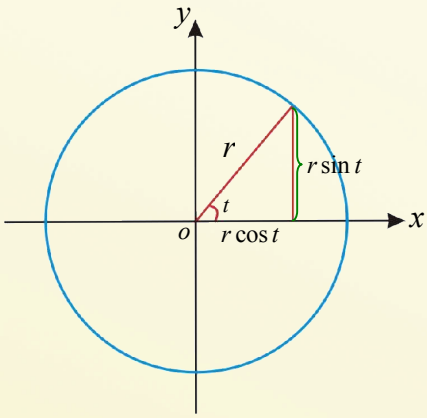
$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

$$L=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

لومړی مثال: د $x^2+y^2=r^2$ د دایرې محیط محاسبه کړئ:

حل: څرنګه چې د دایرې پارامتري معادله په دې ډول $\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}$ ده.

که چېرې $0\le t\le\pi$ وي، نو د دایرې نمایي محیط پیدا کړئ.



$$P=\int_0^\pi\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$x'=-r\sin t \quad , \quad y'=r\cos t$$

$$P=\int_0^\pi\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$P=\int_0^\pi\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt$$

$$P=\int_0^\pi\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^\pi\sqrt{r^2}\,dt$$

$P=[rt]_0^\pi=(r\cdot\pi-r\cdot 0)=\pi r$ د دایرې نیمایي محیط

د دایرې مکمل محیط $=2\pi r$

یادونه:

1- د $y=f(x)$ منحني معادله په $a\le x\le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د x د پارامتر په پام کې نیولو سره د منحنی د قوس اوږدوالی داسې محاسبه کوو:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^{\,2}(x)}\ dx$$

مثال: د $y=f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالي په $0\le x\le 4$ فاصله کې حساب کړئ.

حل: $f(x)=x^{\frac{3}{2}} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\ dx=\int_0^4 \sqrt{1+(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\cdot dx$$

$$=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ \ dx=\int_0^4 \sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du=\frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}\ du$$

$$=\frac{4}{9}[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}]_0^4=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_0^4=\frac{8}{27}[\sqrt{u^3}]_0^4$$

$$u=1+\frac{9}{4}x$$

$$du=\frac{9}{4}dx$$

$$dx=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)^3}]_0^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}\cdot 4)^3-1}]=\frac{8}{27}(\sqrt{10^3}-1)$$

$$L=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

2- د $x=f(y)$ منحني په $a\le y\le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د y د پارامتر د په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$L=\int_a^b \sqrt{f'^2(y)+1}\ \ dy$$

مثال: د $x=f(y)=y^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالی په $1\le y\le 4$ انټروال کې حساب کړئ.

حل:

$$f(y)=y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y)=\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_a^b \sqrt{f'^2(y)+1}\,dy=\int_1^4 \sqrt{(\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}})^2+1}\,dy$$

$$=\int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y+1}\,dy=\int_1^4 \sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du \qquad u=\frac{9}{4}y+1$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_1^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(\frac{9}{4}y+1)^3}]_1^4 \qquad du=\frac{9}{4}dy$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(10)^3}-\sqrt{(\frac{9}{4}+1)^3}] \qquad dy=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{1000}-\sqrt{(\frac{13}{4})^3}]=\frac{8}{27}[10\sqrt{10}-\sqrt{\frac{2197}{64}}]$$

پوښتنې

1. د $x=t^2$ او $y=t^3$ د منحنيګانو د قوس اوږدوالی د $1\le x\le 2$ د فاصلې تر منځ پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ د منحني د قوس اوږدوالی په $0\le x\le 1$ انتروال کې پیدا کړئ.

- د $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ انتیگرال د یوې سطحې د مساحت اندازه یا پراخوالی راښیي چې د $y = f(x)$ منحني او د x د محور او د $x = a$ او $x = b$ کرښو له خوا رابند دی.
- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $y = f(x) \geq 0$ په دې صورت کې د $f(x)$ تابع تل د x د محور پورته خواته او که $y = f(x) \leq 0$ وي، په دې حالت کې د $f(x)$ د x د محور لاندې خواته واقع او انتیگرال یې منفي دی.

د دوو منحنيګانو په واسطه د محصور شوی سطې د مساحت محاسبه:

- که چېرې د $f(x)$ تابع د $g(x)$ تابع د ګراف په پورتنی برخه کې واقع وي، نو لرو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

- که چېرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع په پاسنی برخه کې واقع وی؛ لرو چې:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

دګراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم

- که چېرې د $y = f(x)$ متمادي تابع مساحت د $x = a$ او $x = b$ کرښو په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوارن څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه‌یي شکل لري .

چې ارتفاع یې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دایروي سطحو په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وایي او پوهېږو چې د دایرې مساحت نظر د x محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع نظر شکل ته د y له محور سره موازي دی؛ نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول یې نظر د ریمان مجموعې ته په لاندې ډول دی: $v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2\,dx = \int_a^b \pi y^2\,dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$

- که د $x = f(y)$ تابع مساحت د $y = c$ ، $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې مقطع نظر y محور ته $A(y) = \pi r^2$ چې ارتفاع یې $\Delta x = d - c$ او شعاع یې $x = r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران له مساحت څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2\,dy = \int_a^b \pi x^2\,dy = \pi \int_a^b [f(y)]^2\,dy$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:

د قوس د اوږدوالي د محاسبې فورمول: $L=\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$

1) $L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

2) $L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(y)}\,dy$

د شپږم څپرکي پوښتنې

1. د $y^2-x-5=0$ منحني او د y د محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت محاسبه کړئ.
2. د هغې سطحې مساحت چې د $y=\sin x$ منحني په $[0,2\pi]$ انټروال کې او د x د محور تر منځ پرته ده، پیدا کړئ.
3. د $y=x^2-2x$ او $y=6x-x^2$ منحني ګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.
4. د $y=-x^2+4x-3$ منحني او x محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
5. د $y=x^3-6x^2+8x$ او $y=x^2-4x$ منحني ګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
6. د هغه جسم حجم وټاکئ چې د $y=\sin x-\cos x$ منحني او $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ کرښو د x محور په شاوخوا له دوران څخه په لاس راځي، حساب کړئ.
7. د هغې سطحې حجم چې د $y=\frac{1}{4}x^2+2$ منحني له دوران څخه د x د محور پرشاوخوا په $[0,4]$ انټروال کې جوړ شوي وي.
8. د هغې رابندې شوې سطحې د جسم حجم چې د $y=x^2$ منحني او د $x^2+y^2=2$ دایرې له دوران څخه د x محور په شاوخوا جوړ شوې وي، پیدا کړئ.
9. د هغه جسم حجم چې د $y=\frac{1}{2}x+1$ کرښې دوران او د x محور په $[2,6]$ انټروال کې جوړېږي، په لاس راوړئ.
10. د $y=-x+4$ منحني د قوس اوږدوالی په $-2\le x\le 2$ انټروال کې حساب کړئ.
11. د $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$ تابع د منحني د قوس اوږوالی په $2\le x\le 5$ انټروال کې پیدا کړئ.

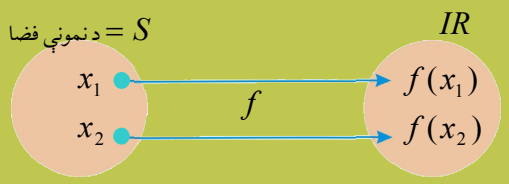
اووم څپرکی

احصائیه

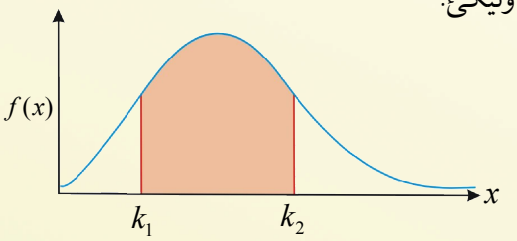
موږ ټول افغانان یو.

د احتمال د تابع توزیع

د تصادفي ازمایښت، نمونه‌یي فضا او د ناڅاپه متحول کلمې ستاسو په ذهن کې څه څه را ژوندي کوي.



- هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې ترې ګټه اخلي، له هغه متحول سره چې په الجبر کې مو لوستي دی، څه توپیر لري؟
- که $x_1, x_2, \ldots x_n$ د یوه سټ عناصر او $P(x = x_i) = f(x_i)$ تابع ولرو، هغه مرتبې جوړې چې د نوموړې تابع څخه په لاس راځي، جوړې او بیا یې ولیکئ.
- مخامخ شکل ته په کتنې سره د k_1 او k_2 مقدارونو ترمنځ او $f(x)$ د منحني لاندېنی محدود شوی مساحت د انتیګرال په شکل وښیئ.



- د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د $[E(x = x_i)] = \sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i)$, $[x_i - E(x_i)]^2$ او $[x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$ مجموعه په لاس راوړئ.

x_i	0	1
$f(x_i)$	0.5	0.5

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

ـ هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې تر څېړنې لاندې نیول کېږي عبارت له هغې تابع څخه دی چې د تعریف ناحیه یې نمونه‌یي فضا او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي اعداد دي.

ـ که $P(x = x_i) = f(x_i)$ ولرو، نو د $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)], \ldots, [x_n, f(x_n)]$ مرتبو جوړو ته د مجزا(غیر متمادي) احتمال تابع وایي.

- د تجمعي او متمادی احتمال تابع کولای شو، په دې بڼه $F(x) = P(X \le x)$ وښیو.
- که چېرې $f(x)$ د احتمال تابع او x تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د دې احتمال چې x د k_1 او k_2 په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)\,dx$$

- که چېرې x پیوسته ناڅاپه (تصادفي) متحول او $k_1 < k_2$ څخه وي، په دې صورت کې:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

- که چېرې x ناڅاپه مجزا متحول وي، په دې حالت کې اوسط $(Expected\ Value)$ د x تصادفي مجزا متحول چې د $E(x)$ په بڼه ښودل کېږي، برابر دی له:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots\ldots\ldots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د x اوسط هم بلل کېږي چې هغه په $\bar{x}$ ښیي همدارنګه که چېرې x غیر متمادي تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د x وریانس چې په S^2 ښودل کېږي برابر دی له:

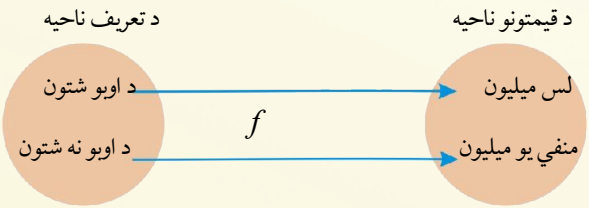
$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

مثال: یو شخصي شرکت غواړي د یوې غونډۍ پر سر د اوبو یوه څاه وکنې، د اوبو څاه په یو میلیون افغانۍ تمامېږي که نوموړی څاه اوبه ورکړي د شرکت مالک لس میلیونه افغانۍ اجوره اخلي، پرته له هغې به د څاه د کېندلو یو میلیون افغانۍ مصرف په زیان ورکړي.

الف_ دا موضوع د یوې تابع په بڼه وښیئ.

ب_ که د دې احتمال چې کیندل شوي څاه اوبه ورکړي 0.2 او د نه ورکولو احتمال یې 0.8 وي، په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط (*Expected Value*)، وریانس او د x تصادفي متحول معیاري انحراف پیدا کړي.

د الف حل:



د ب حل: د تصادفي متحول د احتمال تابع اوسط، وریانس او معیاري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوی دی:

تصادفی متحول	د احتمال تابع	اوسط	د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	واریانس	انحراف معیاری
x_i	$f(x_i)$	$E(x)=\sum x_i f(x_i)$	$[x_i-E(x)]^2$	$S^2=[x_i-E(x)]^2 f(x_i)$	S
-1 10	0.8 0.2	$-1\cdot 0.8=-0.8$ $10\cdot 0.2=2$	$(-1-1.2)^2=4.84$ $(10-1.2)^2=77.44$	$4.84\cdot 0.8=3.872$ $77.44\cdot 0.2=15.488$	4.4
	0.1	1.2		$\sum S^2=19.360$	

پوښتنې

فرض کوو چې د یوه موټر پلورنځي د 100 ورځو خرڅلاو په لاندې ډول دی:

د ورځو شمېر	60	30	8	2
د پېرودل شوو موټرو شمېر	0	1	2	3

د x تصادفي متحول د احتمال تابع او د تجمعي احتمال تابع پیدا کړئ.

د تجمعي احتمال له تابع څخه په ګټه اخېستنې سره ووایئ چې په یوه ورځ کې حداکثر احتمال د (2) موټرونو او حداقل احتمال د دوو موټرونو په کومه کچه ده؟

د دوه جمله‌يي توزيع او د برنولي ازمويښت

يو ګډون کوونکي د پوهنتون د کانکور په آزموينه کې له 160 سؤالونو څخه 100 سوالونه حل کړل. تاسې څه سوچ کوئ چې دا ګډون‌کوونکی په آزموينه کې بريالی کېږي او يا بې نتيجه پاتې کېږي؟

د احتمال دوه جمله‌يي توزيع يوه غيرمتمادي توزيع ده چې د مختلفو پېښو د توصيف لپاره په کار وړل کېږي اکثراً پېښې چې په نړۍ کې منځ ته راځي دوه حالتونه لري.

فعاليت

د لاندې آزمويښتي پېښو له شرطونو څخه څه ډول پايلې په لاس راوړلای شئ.

- څو ځلې دوه سکې واچول شي چې سمدلاسه دواړه شېر راشي.
- څو ځلې دوه تاسه واچول شي چې د شمېرو مجموعه يې له 7 څخه کوچنی شي.
- له يوې جعبې څخه څو ځلې د يوې مرۍ(مهره) اخېستل چې د تورو او سپينو مرۍ لرونکي ده.
- له يوې جعبې څخه چې د تورو او سپينو مريو لرونکې ده څو ځلې يوه مرۍ واخېستل شي چې اخېستل شوی مرۍ سپينه وي(چې اخېستل شوي مرۍ بيا په جعبه کې واچول شي)
- که چېرې m بريالیتوب له n آزمايښت څخه($m < n$) چې ترتيب په کې مهم نه دی دا ټاکنه د څه په نامه يادېږي او فورمول يې وليکئ.
- که د m شکلونو د بريالیتوب احتمال د n ازمايښت څخه په P او $n-m$ شکلونو د ناکامې احتمال د n له آزمايښت څخه په q وښودل شي، نو د m له کاميابي احتمال د آزمايښت د n له شکلونو څخه به څو وي؟
- زده‌کوونکي له پنځو څلور ځوابه آزموينې له پوښتنو سره مخامخ کېږي. هغوی په ناڅاپه ډول پوښتنو ته ځوابونه ورکوي، فرض کړئ که د (سم ځواب) بريالیتوب په T او (ناسم ځواب) نه بريالیتوب د F په توری وښودل شي په دې صورت کې د هر يوه سم او ناسم ځواب احتمال به څومره وي؟

له پورتني فعاليت څخه څرګندېږي چې د برنولي آزمايښت يو ناڅاپه ازمايښت دی چې کولای شو پايله يې په دوو حالتونو بريالیتوب او نابريالیتوب دسته بندي کړو.

د برنولي توزیع کولای شو چې په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ په بڼه وښیو په داسې حال کې چې P د بریالیتوب احتمال او $q=1-p$ د نابریالیتوب احتمال دی.

که چېرې یو ازمایښت n ځلې تکرار کړو، یو ترادف په لاس راځي، داسې چې که د هر آزمایښت د بریالیتوب احتمال P او نابریالیتوب احتمال q وي، په دې صورت کې د n ځلې آزمایښت څخه د m ځلې بریالیتوب احتمال عبارت دی له: $0\le m\le n$ $\quad P(X\le m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$

پورتني اړیکه کولای شو چې په دې ډول $B(m,n,p)$ هم وښیو.

د پورتني فورمول په پام کې نیولو سره کولای شو، د دوه جملېیي د توزیع اوسط په $\bar{x}=np$ او د دوی د توزیع معیاري انحراف د $S=\sqrt{npq}$ په بڼه وښیو.

مثال: د یوه ناروغ د ښه کېدو احتمال د شکرې له ناروغی څخه 0.4 دی، که چېرې 15 تنه په دې ناروغی اخته وي، ددې څومره احتمال شته چې پنځه تنه ښه شي او همدا شان پیدا کړئ چې له 3 څخه تر 4 تنو پورې جوړ شي.

حل: څرنګه چې $n=15$, $m=5$, $q=0.6$, $P=0.4$ دی نو:

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10}$$

$$=\frac{15!}{5!(15-5)!}\cdot 0.01024\cdot 0.00604661760=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$

$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$

$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}=(3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3}+(4^{15})(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

$$=\frac{15!}{3!(15-3)!}(0.064)(0.6)^{12}+\frac{15!}{4!(15-4)!}(0.0256)(0.6)^{11}$$

$$=\frac{2730}{6}(0.000139264)+\frac{3270}{24}(0.0000928512)$$

$$=\frac{0.38019072}{6}+\frac{0.3036}{24}=0.063365+0.012650$$

$$P(3\le m\le 4)=0.076015$$

پوښتنې

په یوه کلي کې 200 کورنی اوسېږي که هره کورنۍ 4 ماشومان ولري ددې احتمال پیدا کړئ چې هره کورنۍ

- حد اقل یو زوی لري.
- یوازې دوه زامن لري.
- یوه یا دوې لوڼې ولري.

د پواسن د احتمال توزیع

که چېرې د برنولي دوه جملهيي توزيع فورمول په پام کې ونيسو، ايا ويلاي شئ که چېرې د برنولي په دوه جملهيي توزيع کې د P قيمت صفر ته تقرب وکړي او د n قيمت لايتناهي ته تقرب وکړي، نو د برنولي دوه جملهيي توزيع څه سره مساوي کېږي.

1) $b(x,n,p)=\binom{x}{n}p^x q^{n-x}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} b(x,n,p)=\dfrac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$

3) $P(x,\lambda)=\dfrac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$

کــه $p=0.1, n=5$ او $m=2$ وي د $P(x=m)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$ قيمتونــه پــه داســې حــال کــې چــې $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$ او $\lambda=np$ وي محاسبه کړئ او د پاسنيو توابعو له قيمتونو سره يې پرتله کړئ، ويلای شئ چې د کوم فورمول په کار وړل، ساده دی؟

د پواسن فورمول کولای شي چې د m شکلونو د کاميابئ احتمال د n آزمايښتونو څخه کله چې n لوی او د کاميابي احتمال P کوچنی وي، د تقريبي محاسبې لپاره کارول کېږي.

دا فورمول عبارت دی له: $P(X=m)=\dfrac{e^{-x}\lambda^m}{m!}$

چې $\lambda=np$ او $e=2.71828$ دی.

په ياد ولرئ چې د پواسن په توزيع کې اوسط او هم وريانس له λ سره برابر دی.

مثال: 200 تنو مسافرینو د یوې الوتکې ټکټ اخېستلی دی د مخکنیو تجاربو په اساس که د هغه مسافرینو چې ټکټ یې رانیولی دی د نه راتګ احتمال 0.01 وي. ددې احتمال چې 3 تنه مسافرین بېرته را نه شي څومره دی.

حل: په دې مسئله کې د(نه راتلل) کامیابي ده او همدارنګه لیدل کېږي چې $n = 200$ ډېر لوی او $P = 0.01$ یعنې د کامیابی احتمال کوچنی دی، نو لرو:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{m}}{m!} \qquad \lambda = n\,p = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^{3}}{3!} = \frac{\frac{1}{(2.71828)^{2}} \cdot 8}{6} = \frac{\frac{1}{7.3890461584} \cdot 8}{6}$$

$$= \frac{0.13533 \cdot 8}{6} = \frac{1.08268}{6} = 0.1804$$

اوس که چېرې دا احتمال د دو جملهيي په فورمول محاسبه کړو،لرو چې:

$$P(X = m) = \binom{n}{m} P^{m}\; q^{n-m}$$

$$\left.\begin{array}{l} n = 200 \\ p = 0.01 \end{array}\right\} \Rightarrow q = 0.99$$

$$P(3) = P(X = 3) = \binom{200}{3} (0.01)^{3} (0.099)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3! \cdot 197!} (0.01)^{3} (0.099)^{197} = 0.1814$$

څرنګه چې لیدل کېږي دواړه ځوابونه سره معادل دي، نو واضح ده چې د پواسن د فورمول له لارې احتمال محاسبه ساده ده.

یادونه:

د پواسن د فورمول په واسطه کولای شو چې په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال په لاندې ډول وښیو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

په پورتني فورمول کې t د ښودل شوی وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط هغې ته ورکړل شوی وي m د ورتللو شمېر د t په واحد وخت کې د λ د ورتګ شمېر اوسط په واحد د وخت کې دی.

مثال: که په یوه ساعت کې د یوه بانک د مراجعینو شمېر په متوسط ډول 60 تنه وي، ددې احتمال چې خلور تنه په لومړیو دریو دقیقو کې راغلی وي، څومره دی.

حل:

$$\lambda=60 \quad , \quad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \quad , \quad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{\frac{1}{20.0854}\cdot 81}{24}=\frac{4.03278}{24}=0.168032$$

پوښتنې

د چاپ د یوه ماشین د جوړولو لپاره په یوه کال کې په متوسط ډول ورتګ دوه ځلې ده، فرض کوو چې د پواسن توزیع په دې اړه صدق کوي.

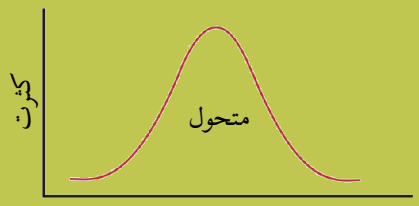
الف: د ماشین د جوړولو لپاره د ورتګ د احتمال توزیع په یوه کال کې حساب کړئ.

ب: د توزیع اوسط او معیاري انحراف څومره دی؟

ج: فرض کړئ که د هر ورتګ مصرف 100 افغانۍ وي، د هر ماشین د جوړولو مصرف پیدا کړئ؟

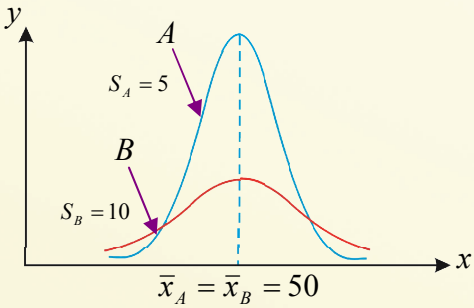
د: ددې احتمال چې په هر کال کې دیوه ماشین د جوړولو مصرف له 300 افغانیو څخه زیات وي، څومره دی؟

د نورمال توزیع

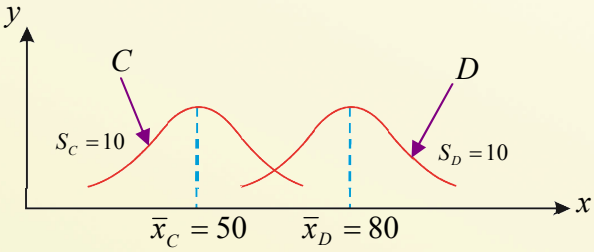


پوهېږو چې د نورمالي منحني شکل مشابه او متناظر له زانګولی سره ده، په نورماله منحني کې د پراګندګی مرکزي شاخصونه(معیاري انحراف او اوسط) څه ډول ځایونه(موقعیتونه) نیولی شي.

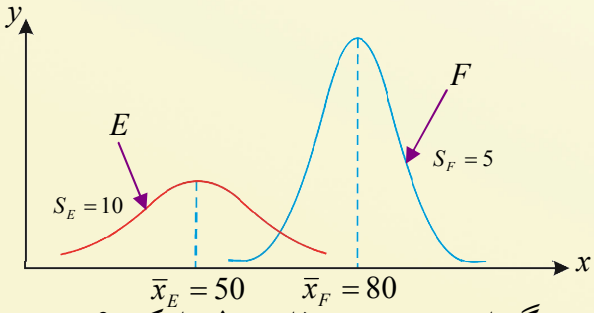
څو نورمالې توزیع ګانې له بېلابېلو سطحو او معیاري انحرافونو سره په لاندې شکلونو کې ورکړل شوي دي.



الف شکل



ب شکل



ج شکل

لاندینی فعالیت له پورتنیو شکلونو څخه په ګټه اخېستنې سره په شفاهي ډول بیان کړئ؟

- د الف په شکل کې د A او B د تصادفي متحول توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکې ده؟
- د ب په شکل کې C او D توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکی دی؟
- د ج په شکل کې د E او F توزیع د څه ډول معیاري انحراف اوسط لرونکی دی؟
- د نورمال منحني شکل دواړو خواوو ته ترکوم ځایه غزیدلی دی؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه داسې پایله په لاس راځي چې:

د نورمال منحني توزیع کېدای شي چې په څلورو طریقو یو له بل سره توپیر ولري. د نورمال توزیع ریاضیکي معادله چې د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکی ده، په لاندې ډول ښوول کېږي.

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

او یا

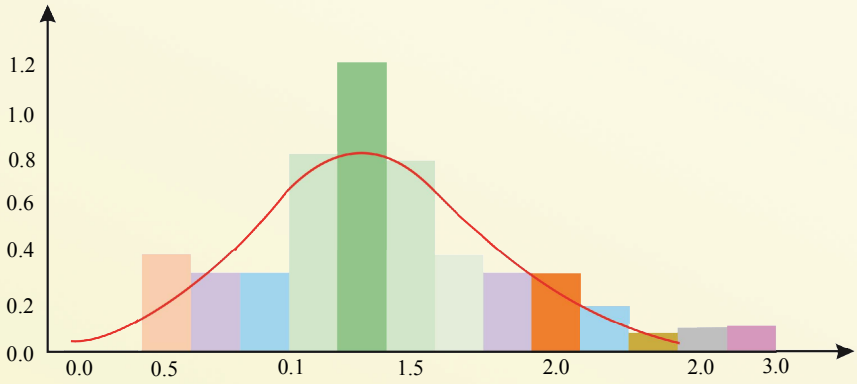
$$f(x) = N(x, \bar{x}, s)$$

په داسې حال کې چې $e = 2.71828$ او π هم ثابت عدد 3.14189 دی $\bar{x}$ اوسط، s معیاري انحراف ، x متمادی تصادفي مقدار او $f(x)$ د منحني جګوالی راښیي.

د نورمالې توزیع له متمادی توزیعګانو څخه ده. د نورمالي توزیع په واسطه کولای شو، د اندازه کولو توپیر په ښه توګه سره نژدې کړو.

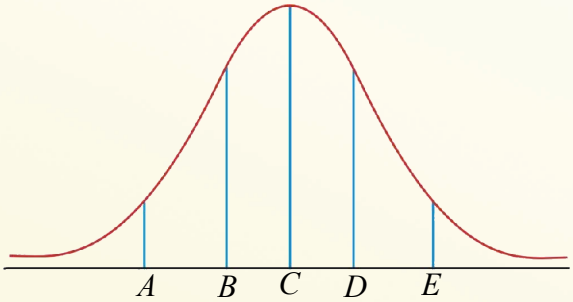
مثال: د موټرونو ماشین د تیلو سوزولو په وخت کې یوه اندازه مضر لوګی تولیدوي، د هغه مضر لوګي مقدار چې له 46 موټرونو تولیدېږي، د یوه تن په واسطه چې لورنزن نومېده په 1980 کال کې وڅېړل شو.یوه اندازه لوګی د نایتروجن اوکسایدونه لري. لاندې مستطیلي ګراف د نایتروجن اوکساید میزان د $(\frac{gr}{mil})$ د 46 موټرونو د نورمال احتمال توزیع اوسط او وریانس چې د نوموړی کس له خوا تر څېړنې لاندې نیول شوی. ددې مستطیلي ګراف د ستونونو مساحت متناسب دی له هغو 46 نمونه‌یي شمېر له اندازه‌ګیري سره چې ددې ستون د افقي ټکو تر منځ قرار لري.

د مثال په ډول په څلورم ستون کې(چې له 1 څخه تر 1.2 پورې په افقي محور قرار لري) د $0.870 \cdot 0.2 = 0.174$ مساحت لرونکی دی چې د $\frac{4}{46}$ سره برابر دی، ځکه 8 دیتا له 1 څخه تر 1.2 پورې پراته دي.



پوښتنه

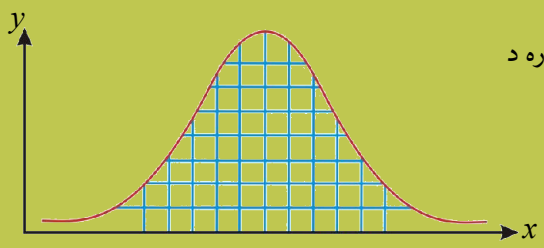
لاندېنی شکل په پام کې ونیسئ د A, B, C, D او E ټکو موقعیت د معیاري انحراف د اوسط له جنسه پیدا کړئ.



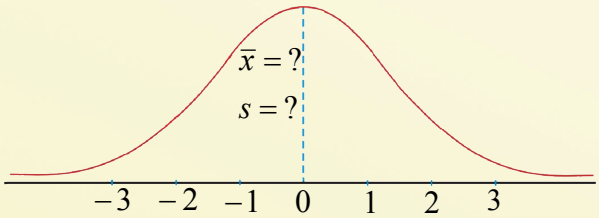
د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې ستندرډ کول

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

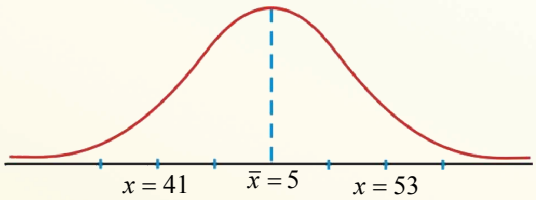
د $y = f(x)$ د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د څه ډول لارو وړاندیز کوئ.



- که چېرې د x تصادفي متمادي متحول د احتمال نورمال توزیع چې اوسط یې $\bar{x}$ او معیاري انحراف یې s وي، ددې احتمال چې دا تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ کمیت غوره کړي د انتیګرال په بڼه یې ولیکئ.
- سوچ کولای شئ چې د احتمال نورمال توزیع د ریاضي شکل انتیګرال محاسبه به ساده کار وي.
- که چېرې د نورمال تصادفي متحول په $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ ډول ولیکو، د $f(x)$ د احتمال توزیع تابع له څه سره برابره ده؟
- ویلای شئ چې اوسط او معیاري انحراف په لاندې شکل کې له کومو عددونو سره برابر دی؟



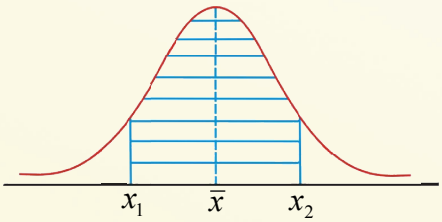
- که په لاندې شکل کې چې د $x = 41$ او $x = 53$ قیمتونه په نورمال ډول د $\bar{x} = 50$ اوسط او $S = 5$ معیار انحراف ښودل شوی دی، نو د $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ مقدار په لاس راوړئ.



له پورتني فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي چې د احتمال د محاسبې لپاره داسې چې د x پیوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ یو کمیت ونیسئ، نو باید د x د احتمال د توزیع له تابع څخه انتګرال ونیسو او د منحنې لاندې سطحه د x_1 او x_2 فاصلو ترمنځ په لاندې ډول محاسبه کړو:

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s)dx$$



د نورمال توزیع احتمال محاسبه ساده کار نه دی، د نورمال توزیع‌ګانو د منحنې لاندې مساحت محاسبه اوږدو جدولونو ته اړتیا لري چې عملاً داکارګران دی، کولای شو چې د جدول د جوړولو شکل د احصائیوي data د ستنډرډ کولو په واسطه حل کړو.

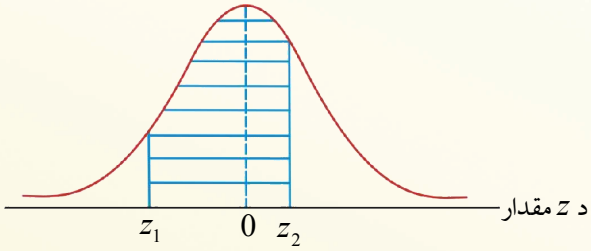
په دې معنا چې کولای شو په x پورې اړوند تصادفي متحول چې د نورمال توزیع لرونکی دی، د لاندې اړیکې په واسطه ستنډرډ کړو.

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

دلته z د ستنډرډ نورمال متحول په نامه او منحني ته د ستنډرډ نورمال منحني په نامه یا د نورمال احتمال منحني نومول کېږي، په یاد ولرئ چې د z ستنډرډ وي، متحول تل د صفر اوسط لرونکی او یو معیار انحراف یې دی، همدرانګه د نورمال منحني او افقي محور ترمنځ مساحت له ټاکل شوي واحد سره برابر وي.

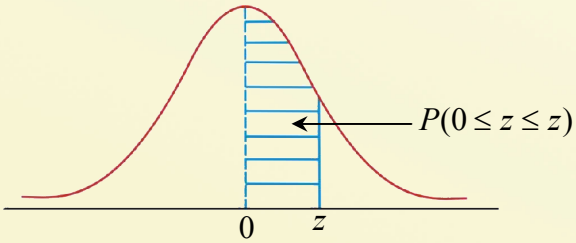
لاندې مساحت د یوه منحني یوه برخه د نورمال احتمال چې له احتمال سره مستقیم تناسب لري او کولای شو چې د $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ بدلولو سره یې په لاندې ډول وښیو.

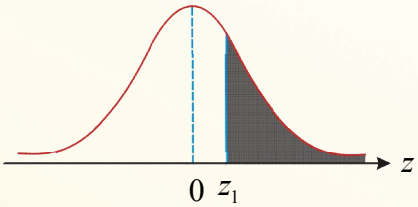
$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \int_{z_1}^{z_2} N(z,0,1)\, dz$$



د x متحول منحني لاندې مساحت چې د $x = x_1$ او $x = x_2$ ترمنځ واقع دی، د z متحول له منحني مساحت سره چې د $z = z_1$ او $z = z_2$ ترمنځ پراته مساوي دي. په پایله کې کولای شو چې د نورمال د توزیع سټنډرډ د جدول په لرلو سره د نورمال توزیع احتمال د ناڅاپه متحول د هر ممکنه قیمت لپاره په لاس راوړای شو.

د سټنډرډ نورمال د توزیع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شو، په لنډ ډول توضیح کړو. هغه جدول چې ددې لوست په پای کې راغلی دی، د سټنډرډ نورمال توزیع اړوند په احتمالاتو کې ګډون لري. لاندې جدول ددې لوست یوه برخه د جدول پای راښیي، هغه ارقام چې د جدول دپاسه لیکل شوی دی، راښیي چې z د مثبتو مقدارونو لپاره تنظیم شوی دی چې د منحني لاندې مساحت له صفر ټکي څخه تر z پورې راښیي.

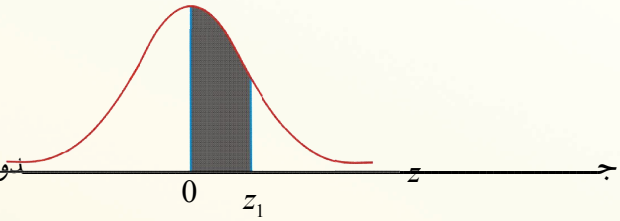




جدول(1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9268	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997

جدول(2)



Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	00239	0.0279	00311	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0978	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2226
0.6	0.2258	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2454	0.2486	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2996	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4409	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4727	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0/4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4966
3.0	0.4987	04987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

د مثال په ډول که چېرې $z = 1.56$ وي لومړی هغه سطر پیدا کړئ چې په هغه کې z د 1.5 معادل دی، که چېرې ددې کرښې په اوږدوالي پرمخ لاړ شو، تر څو هغه ستون ته ورسېږي چې له پاسه 0.06 لیکل شوی دی له 0.9406 عدد سره مخامخ کېږو چې د منحني د لاندې اړوندې سطحې له $z = 0$ څخه تر $z = 1.56$ پورې دی، نو لیکلای شو چې: $P(0 \le Z \le 1.56) = 0.9406$

لومړی مثال: د څښلو(نوشابې) د بوتلونو د ډکولو دستګاه داسې تنظیم شوې ده، که 952 ملي‌لیټر نوشابه په بوتل کې واچوي ددې نوشابې میزان چې د نورمال توزیع اوسط یې 952 ملي‌لیټره او معیاري انحراف یې 4 ملي‌لیټره دی. ددې احتمال چې بوتل د 952 او 956 ملي‌لیټرو ترمنځ نوشابه ولري، څومره دی.

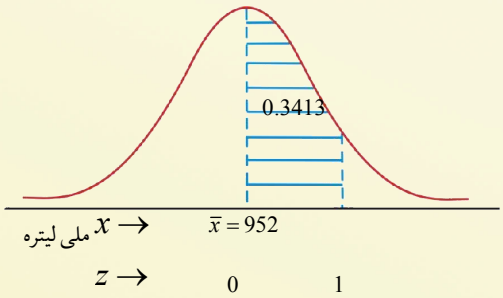
حل: لومړی z د x له جنسه پیدا کوو:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نو پر دې اساس د x د تعریف ناحیه له 952 څخه تر 956 د z تعریف د ناحیې له صفر څخه تر 1 بدلېږي.

د لوست د پېل له جدول(2) څخه په ګټه اخېستنې سره لرو $P(0 \le z \le 1) = 0.3413$ احتمال داسې دی چې هغه بوتل چې له 952 څخه تر 956 ملي‌لیټرو نوشابه ولري، یا په بل عبارت 34.13 فیصده ډک شوي بوتلونه له 952 څخه تر 956 ملي‌لیټره نوشابه لري؛ یعنې:



$$\begin{aligned} P(0 \le z \le 1) &= P(z_2) - P(z_1) \\ &= P(1) - P(0) \\ &= 0.3413 - 0 \\ &= 0.3413 \end{aligned}$$

دویم مثال: په یوه خاص مضمون کې د زده‌کوونکو د نمبرو د نورمال توزیع اوسط 70 او معیاري انحراف یې 8 دی له نورمال ستنډرډ جدول څخه په ګټه اخېستنې سره له 54 څخه تر 84 نمبرو ترمنځ فیصدي پیدا کړئ.

حل: د مسألې حل په لاندې ډول په ترسیمي بڼه ښودل شوی دی.

د $x = 54$ لپاره لرو: $z_1 = \frac{54-70}{8} = -2$

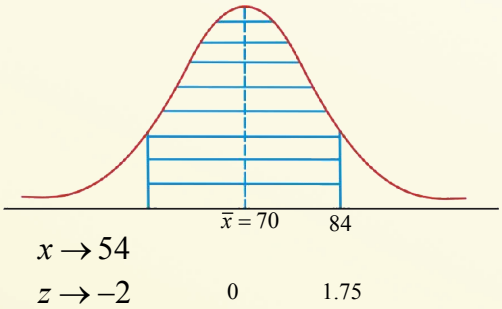
د $x = 84$ لپاره لرو: $z_2 = \frac{84-70}{8} = 1.75$

څرنګه چې د سټنډرډ نورمال منحني لاندې مساحت په یو محدود انټروال کې په پام کې نیول شوی دی، نو له نورمال سټنډرډ جدول(2) څخه لرو:

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$
$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

د ټاکل شوي مساحت د پام وړ احتمال دی.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.4772 + 0.4599$$
$$= 0.9371$$

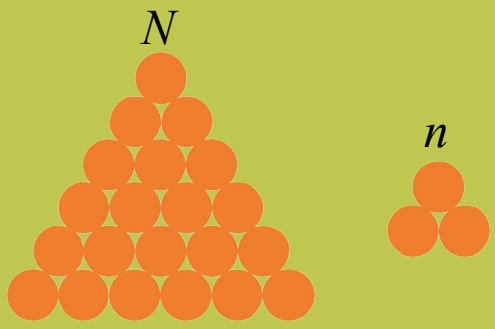


پوښتنې

د لومړی مثال په پام کې نیولو سره محاسبه کړئ چې د بوتلونو څو فیصده له 948 څخه تر 956 ملي‌لیټرو پورې نوشابه لري.

نمونه اخېستل

په دې متل کې((موتی د خروارو نمونه ده)) څرنګه تحلیلوئ.



$N =$ جامعه $\Rightarrow n = ?$

فعالیت

- که چېرې وغواړئ چې د افغانستان د 12 ټولګي د زده‌کوونکو ونې(قد) اندازه کړئ ددې کار لپاره څه ډول لارې وړاندیز کوئ.
- نمونه په دوو ډولونو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناڅاپه نمونه، تاسې ددې نمونو کومې یوې ته غوره‌والی ورکوي؟ ولې؟
- د نمونه ګیرۍ لپاره ښکاره خپل دلایل شته آیا کولای شئ یو یا دوه دلیلونه یې ووایئ.
- سوچ کولای شي چې د اوسط او معیاري انحراف عددي څانګړنې چې د ټولنې د توزیع او د نمونې د توزیع لپاره ورڅخه ګټه اخېستل کېږي، یو شان وي.
- آیا د نمونه‌ګیري او لیدل شویو ناڅاپه متحولینو د مقدارونو ترمنځ توپیر شته؟

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو چې د نمونه اخېستنې بېلې بېلې لارې شته دی.

ـ ناڅاپه نمونه اخېستنه: د ټولنې ټول عناصر په ټاکل کېدو کې هم چانس دی.

ـ سیستماټیک نمونه اخېستنه: د ټولنې عناصر په منظم ډول کود وهل شوی دی.

ـ طبقه‌یي نمونه اخېستنه: ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

ـ خوشه‌یي نمونه اخېستنه: که ټولنه ډېره لویه وي، هغه په بېلابېلو څانګو وېشو او له هرې څانګې څخه یوه نمونه ټاکو.

ـ د هرې ټولنې عددي څانګړنې(اوسط، معیاري انحراف) ته د ټولنې پارامتر وایي.

ـ د هرې ټولنې د عددي نمونه‌ګیري څانګړنې(اوسط، معیار انحراف) ته آماره وایي.

ـ د نمونې پایلې د مشاهدې د مقدارونو په عنوان د ناڅاپه متحولینو په بڼه په پام کې نیسو.

ـ د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ناڅاپه متحولونو یوه ناڅاپه نمونه د x تصادفي متحول ویل کېږي.

که چېرې تابع یې په دې ډول تعریف شوی وي.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \ldots f(x_n)$$

مثال: فرض کوو چې په یوه قطی کې 5 سپینې او 7 تورې ګلولې وي، د قطی له منځ څخه 5 ګلولې یوه یوه ځای په ځای کول(د یوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز) ټاکو.

د ټاکل شوی ناڅاپه نمونې تصادفي متحولین په ژبه بیان کړئ او اړونده توزیع یې پیدا کړئ.

حل: د x_1, x_2 او x_3 ناڅاپه متحولونه په پام کې ونیسئ په لومړی پړاو کې د x_1 ناڅاپه متحول لپاره د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپینې ګلولې د ټاکلو په لومړی پړاو کې ځانته غوره کړئ او د x_2 متحول هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپینې ګلولې د ټاکلو لپاره په دویم پړاو کې ځانته غوره کړي په همدې بڼه د x_3 ناڅاپه متحول په دویم پړاو کې هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره ټاکو چې په دې پړاو کې (1) عدد سپینه ګلوله ځانته غوره کوي، په دې حالت کې د x_1, x_2 او x_3 ناڅاپي متحولونه د برنولي ناڅاپه متحولین دي. د $p = \frac{5}{12}$ له پارامتر او د $i = 1, 2, 3$ مقدارونو څخه لرو:

$$f(x_i) = (\frac{5}{12})^{x_i} (1 - \frac{5}{12})^{1-x_i}$$

څرنګه چې نمونه اخېستن ناڅاپه ده، نو د x_1, x_2 او x_3 ناڅاپه متحولین یو له بل څخه بېل دي، نو تابع یې عبارت دی له:

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1 \ , \ x_2 = x_2 \ , \ x_3 = x_3)$$

په یاد ولرئ چې د عناصرو هره ناڅاپه نمونې له مجهول پارامترونو سره تړلي نه دي، هغې ته آماره وایي.

پوښتنې

1. که $N = 25$ د یوې ټولنې حجم وي که وغواړو چې پنځه ګونه ناڅاپه نمونه یې پیدا کړو، د هغو نمونو شمېر چې په لاس راځي څومره ده؟
2. ساده او ناڅاپه نمونې سره له مثاله بیان کړئ؟
3. فرض کوو چې له یوې ټولنې څخه مو ناڅاپه نمونه رانیولې ده څه فکر کوئ چې له ددې نمونې سره به څه وکړو؟

د نمونې د اوسط توزیع

دولـت غـواړي وپـوهېږي چـې د یـوه ښـار د وګـړو متوسـطه ګټه(سپما) څومره ده؟

ددې کار لپاره ناڅاپه نمونه ټاکي او د نمونې اوسط محاسبه کوي.

اوس باید ددې محاسبه شوې مقدار څخه کوم کمیت تخمین کړئ؟

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = ?$$

فعالیت

- د لاندې data د دریو زده‌کوونکو د ورزشي لوبو د نمبرو پایله راښیي:

نوم	داود	سلیمان	پژواک
نمبرې	2	3	4

- د نمبرو د احتمال توزیع یې ولیکئ.
- د زده‌کوونکو د نمبرو اوسط او معیاري انحراف حساب کړئ.
- راکړل شوی نمبرې د مرتبو جوړو په مرسته(ممکنې دوه ګونې نمونې د ځای په نیولو) ارایه او د هرې نمونې اوسط د جدول په بڼه وښیئ.
- د نمونو د اوسط د احتمال توزیع جدول(د $\bar{x}$ د کثرت د تو زیع جدول) ولیکئ.
- د $\bar{x}$ د کثرت توزیع جدول مستطیلي ګراف رسم کړئ.
- د اوسط د $\bar{x}$ متحول د زده‌کوونکو د نمبرو له اوسط سره پرتله کړئ.

له پورتني فعاليت څخه دا پايله په لاس راځي:

که $x_1, x_2, \ldots, x_n$ د يوې ټولنې د $f(x)$ احتمال تابع ناڅاپه نمونه وي، په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې احتمال توزيع عبارت دی له:

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\ldots$	

د $\bar{x}_n$ متحول اوسط، $E(\bar{x}_n) = \mu$

د $\bar{x}_n$ متحول وريانس، $U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$

د نمونې وريانس $S_n{}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

د نمونه‌يي وريانس اوسط، $E(S^2) = \delta^2$

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ نمونه‌يي اوسط، μ د ټولنې اوسط δ^2 د ټولنې وريانس S^2 د نمونې وريانس دی.

مثال: د لاندې ټولنې، ټولې دوه‌گونې ممکنه ناڅاپه نمونې د ځای په ځای کولو سره ټاکو:

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad x = 1, 2, 3$$

الف: د x د احتمال توزيع وليکئ.

ب: د ټولنې اوسط او وريانس حساب کړئ.

ج: د $\bar{x}$ د توزيع جدول تشکيل او مستطيلي گراف يې رسم کړي.

د: $E(\bar{x})$ او $V(\bar{x})$ حساب کړئ.

حل:

الف:

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^{3} x\, f(x) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2 + 2^2 + 3^3) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

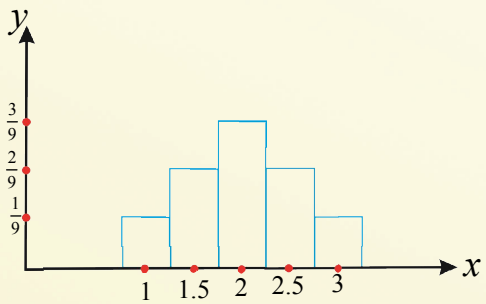
ج: د لاندې جدول ټولې دوه‌گونې ممکنو نمونو د ځای نیول، د هر یوه اوسط راښیي:

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$\bar{x}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

د $\bar{x}$ د توزیع د کثرت جدول په لاندې ډول ښودل کېږي:

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3
$f(\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

د $\bar{x}$ مستطیلي گراف په لاندې ډول رسمېږي:



د:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 1\cdot\frac{1}{9} + 1.5\cdot\frac{2}{9} + 2\cdot\frac{3}{9} + 2.5\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2\cdot\frac{1}{9} + (1.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 2^2\cdot\frac{3}{9} + (2.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 3^2\cdot\frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

نو لیدل کېږي چې:

$$V(\bar{x}) = \frac{\delta_x^{\ 2}}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

پوښتنه

1. فرض کوو چې یوه ټولنه د $6,4,2$ او 8 څلورو عددونو څخه جوړه شوې وي، په دې صورت کې توزیع، اوسط او وریانس ددې ټولنې محاسبه او وروسته له دې ټولنې څخه دوه‌گونې ناڅاپه نمونه د ځای په نیولو سره وټاکئ او د نمونې توزیع اوسط یعنې $\bar{x}$ په لاس راوړئ. د کثرت څو ضلعي گراف یې رسم کړئ، د $\bar{x}$ اوسط او وریانس حساب کړي.

د مرکزي لیمیټ قضیه

پوهېږو چې د ټولنې کمیت ته د ټولنې پارامتر او د نمونې کمیت ته نمونه یې اوسط ویل کېږي د $S_{\bar{x}}$ او $\bar{x}$ د نمونو احصائیه د کوم پارامتر په اړه اطلاعات زموږ په اختیار کې ږدي.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=?$$

- که د لوبې ټولنې حجم $\frac{S}{\sqrt{n}}$ وي، د کوچنۍ ټولنې حجم په $\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ (چې N د ټولنې د عناصرو شمېر، n د نمونه عناصرو شمېر او S معیاري انحراف دی) وښیو څه وخت کېدای شي چې د لوبې ټولنې حجم له کوچنۍ ټولنې سره برابر شي؟
- که د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نورمال توزیع یو له بل څخه بیل وي آیا د هغوی د جمع حاصل د نورمال توزیع لرونکی ده؟
- که $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ناڅاپه ځانګړي متحولونه په یو شان توزیع شوي وي او د μ اوسط لرونکی وي او ς^2 وریانس وي ویلای شو چې د $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ د توزیع وریانس او اوسط څو دی؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که چېرې N د یوې لوبې ټولنې اوسط μ متناهي اوسط او δ^2 متناهي وریانس لرونکی یوه ناڅاپه n ګونه نمونه وټاکو، په دې صورت کې د نمونې اوسط یعنې $\bar{x}$ د تقریبي نورمال توزیع د $\mu_{\bar{x}} = \mu$ اوسط $\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\delta^2}{n}$ وریانس دی او $Z = \frac{\bar{x} - M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ ناڅاپه متحول د نورمال ستنډرډ توزیع دی. په داسې حال کې چې $\frac{N-n}{N-1}$ ضریب د N د لوبو قیمتونو لپاره (1) ته نژدی کېږي. په حقیقت کې یې لیمیټ هغه وخت چې $n \to \infty$ وکړی، برابر له (1) سره دی.

مثال: له یوه لوی ټولګي څخه چې د زده‌کوونکو د ریاضي مضمون نمبرو نورماله توزیع د 71 اوسط او معیاري انحراف یې 9 دی. یوه 9 تایې نمونه ټاکو، ددې احتمال چې ددې نمونې د نمبرو اوسط له 80 څخه زیات وي حساب کړئ. همدارنګه که چېرې په تصادفي ډول یو زده‌کوونکی وټاکو، په دې صورت کې احتمال ددې چې نمبرې یې له 80 څخه زیاتې وي، محاسبه کړئ.

حل: څرنګه چې $\bar{x}$ د نورمال توزیع د μ په اوسط او معیاري انحراف لرونکی دی، نولرو:

$$P(z>80)=P(z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}>\frac{80-71}{\frac{9}{\sqrt{n}}}=P(z>3)$$
$$=1-P(z)\leq 3=1-0.9987=0.0013$$

همدارنګه د $n=1$ لپاره لرو:

$$P(z>80)=P(z=\frac{\bar{x}-\mu}{\delta}>\frac{80-71}{9}=P(z>1)$$
$$=1-P(z)\leq 1=1-0.8413=0.1587$$

پاملرنه:

د $P(z)$ قیمت له (2) جدول څخه په لاس راوړو.

پوښتنه

1- د هغو جعبو وزن چې د یوه ماشین په واسطه تړل کېږي، د نورمال توزیع اوسط یې $\mu = 250gr$ او معیاري انحراف یې $\delta = 20gr$ وي مطلوب دی، د هغه احتمال محاسبه چې د ناڅاپه نمونې د اوسط وزن $n = 16$ تایي د جعبو کوچنی له $240gr$ وي.

د نمونه‌يي توزيع نسبت

د A په يوه ښار کې n کسان غواړي د B يو کس د ښاروال په صفت وټاکي، که دا کسان تر پوښتنې لاندې راشي او x د موافقو کسانو شمېر وښيئ ، ددې کسانو نسبي کثرت مساوي په څه دي.

- که چېرې x د دوو جملو توزيع لرونکی وي، کولای شو وليکو چې:

$$f(x)=\binom{n}{x}P^{x}(1-p)^{n-x} \qquad x=0,1,2,\ .....$$

که چېرې $\hat{P}=\frac{x}{n} \Rightarrow x=n\hat{P}$ وي د x قيمت په تعويض سره په پورتنی فورمول کې $f(\hat{P})$ وليکئ.

- د $\hat{P}=\frac{x}{n}$ په فورمول کې که د x تصادفي متحول د n ناڅاپه متحولينو د $x_1, x_2, ..., x_n$ له مجموع څخه تشکيل شوی وي، $\hat{P}$ د نمونې اوسط سره څه اړيکه لري؟

که چېرې x ناڅاپه متحول، n د برنولي د آزمايښتونو مجموعه، P د هر آزمايښت برياليتوب احتمال وي، په دې صورت کې $\hat{P}$ د نمونې د نسبت آماره $E(x)=n\,p$ اوسط $V(x)=n\,p\,q$ د x ناڅاپه متحول وريانس وي. د دوه جمله‌يي د توزيع په پاملرنې سره د $\hat{P}$ توزيع په دې فورمول سره کولای شو.

$$f(n\hat{P})=\binom{n}{n\hat{P}}p^{n\hat{p}}(1-p)^{n(1-\hat{p})} \qquad \hat{P}=0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},.....,1$$

د $\hat{P}$ ناڅاپه متحولينو اوسط $(Expected\ Value)$ او وريانس په لاندې صورت ليکلای شو:

$$\mu_p=E(\hat{P})=P$$

$$\delta^2\hat{P}=V(\hat{P})=\frac{p\,q}{n}=\frac{p(1-p)}{n}$$

د نورمال ستنډرډ توزيع يې عبارت دی له:

$$z=\frac{x-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p\,q}{n}}}$$

مثال: د کالیو د ښه والي احتمال $P=0.3$ دی، یوه ساده ناڅاپه نمونه $n=6$ ګونه ټاکو. که چېرې x د ناقصو کالیو ښودونکی وي، د x او $\hat{P}$ احتمال توزیع ولیکئ.

حل: د x ناڅاپه متحول د دوه جملهيي توزیع د $P=0.3$ او $n=6$ پارامترونه وي.

$$f(x)=P(X=x)=B(x,6,0.3) \qquad x=0,1,...,6$$

د دوه جملهيي توزیع جدول څخه په ګټه اخېستنې سره لاندې احتمالونه محاسبه او د توزیع د جدول احتمال یې لیکو:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1176	0.3025	0.3241	0.1852	0.0595	0.0102	0.0007

د $\hat{P}$ ناڅاپه متحول د $0,\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6}$ او 1 قیمتونه نیسي:

$$P(\hat{P}=0)=P(X=0)=0.1176$$

$$P(\hat{P}=\frac{1}{6})=P(X=1)=0.3025$$

او پاتې نور په مشابه ډول محاسبه کېږي، پام وکړئ چې:

$$P(\hat{P}=\frac{x}{n})=P(X=x)$$

او د $\hat{P}$ د احتمال توزیع عبارت دی:

$\hat{P}$	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\hat{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

په پورتني مثال کې:

$$P(\hat{P}\le 0.6)=P(x\le 3.6)=P(x\le 3)=\sum_{x=0}^{3}B(x,6,0,3)=0.9294$$

اویا:

$$P(\hat{P}\le 0.27)=P(x\le 1.62)=P(x\le 3)=0.1176+0.3025=0.4201$$

پوښتنې

1. ددې احتمال چې د یوه تن د غوښتنلیک فرم په پوره ډول پرته له غلطی(تېروتنې) څخه ډک کړي $P=0.7$ وي، یوه نمونه د $n=200$ ګونه د استخدام ډک شوي فارمونه مو ټاکلی وي.

_ ددې احتمال محاسبه کړئ چې $\hat{P}$ د ± 00.05 داخلي فاصله کې د ټولنې له بنسټ څخه ولوېږي.

_ ددې احتمال محاسبه کړي چې $\hat{P}$ د 0.6 څخه زیات وي.

د څپرکي مهم ټکي

- ناڅاپه متحول هغه اصطلاح ده چې د یوې تابع په عنوان په احصائیه او احتمالاتو کې ترې ګټه اخېستل کېږي.
- د یوه غیر متمادی ناڅاپه متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعریف ناحیه یې هغه عددونه دي چې ناڅاپه متحول کولای شي هغه غوره کړي او د قیمتونو له ناحیې سره د تعریف د ناحیې د عناصرو اړونده احتمالونه ګډون لري.
- د تجمعي احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعریف ناحیه کې یې هغه عددونه ګډون ولري چې د x ناڅاپه متحول یې څانته غوره کوي او د قیمتونو ناحیه یې د $f(x)$ ټول تصویرونه موجود دي.
- د یوه متمادي متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعریف ناحیه یې د x ټول متمادي مقدارونه غوره کړي او دقیمتونو ناحیه یې $F(x)$ ټول تصویرونه وي.
- د x غیر متمادي ناڅاپه متحول اوسط Expected value او وریانس په وار سره عبارت دي له:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)=\bar{x}$$

$$V(x)=S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x_i))^2 f(x_i)$$

- د برنولي توزیع، $P(X=m)=P^m(1-P)^{1-m}$
- د دوه جملهیي توزیع، $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m\ q^{n-m}$
- د دوه جملهیي توزیع اوسط او معیاري انحراف عبارت له: $S=\sqrt{n\,p\,q}$, $\bar{x}=n\,p$
- د پواسن د احتمال توزیع یوه غیرمتمادي احتمال توزیع ده چې فورمول یې عبارت دی له:

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^m}{m!}$$

- که N له یوې نورمالې جامعې څخه د n ځلې(تایي) ناڅاپه نمونه وټاکو د $\bar{x}$ د نمونهیي اوسط آماره د نورمال توزیع لرونکی له $\mu_{(\bar{x})}=\mu$ اوسط سره او $\delta^2_{\bar{x}}=\frac{\delta^2}{n}$ او $z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ د ستندرد نورمال توزیع سره ده.
- نورماله توزیع: د نورمال توزیع شکل له زنګولی سره مشابه او متناظر دی، په نورمال توزیع کې مرکزي شاخصونه یو له بل سره برابر دي او د پیوسته ناڅاپه متحولونو د ناحیې تعریف محدود دی چې د احتمال توزیع یې عبارت ده له:

$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{\delta})^2}$$

چې μ د ټولنې اوسط او δ د ټولنې معیاري انحراف دی.

- د $f(x)$ تابع د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د a او b په فاصلو کې کولای شو له دې انتیګرال څخه ګټه واخلو:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$$

- که چېرې x د دوه جملهيي توزيع د n شمېرد برنولي پر له پسې ازمايښتونه، P د کامیابۍ احتمال او $q = 1 - p$ د هر ازمايښت د نابرياليتوب احتمال وي، په دې صورت کې د احصائيې د اوسط نمونه او د x ناڅاپه متحول وريانس په ترتيب سره عبارت دی له: $\hat{P} = \frac{x}{n}$, $E(x) = n\,p$ او $V(x) = n\,p\,q$

همدارنګه د دوه جملهيي توزيع، اوسط، وريانس او د سټنډرډ توزيع او $\hat{P}$ ناڅاپه متحول په ترتيب سره عبارت دی له:

$$E(\hat{P}) = P \quad , \quad f(\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} P^{n\hat{P}}\, q^{(1-P)}$$

$$z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{p\,q}{n}}} \quad , \quad V(\hat{P}) = \frac{p\,q}{n}$$

- ددې $z = \frac{x-\mu}{\delta}$ اړيکې په واسطه کولای شو چې هره احصائيوي مجموعه د نورمال توزيع لرونکی وي هغه په سټنډرډ نورمال بدل کړو.
- نمونه په دوو برخو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناڅاپه نمونه.
- د نمونه ګیری طریقې په عمومي ډول عبارت دي له: ناڅاپه نمونه‌ګیري، منظمه نمونه‌ګیري، ګروپي نمونه‌ګیري، خوشه‌يي نمونه ګیري.
- د x نمونې ناڅاپه متحولینو اړوند تابع په دې صورت تعریفېږي.

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n) = f(x_1), f(x_2), \ldots\ldots\ldots, f(x_n)$$

- که چېرې x د ټولنې یوه ناڅاپه نمونه د $f(x)$ د احتمال تابع په لرلو سره وي $E(\bar{x}_n) = \mu$ اوسط، $V(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$ د اوسط وریانس، δ^2 د ټولنې وریانس او S^2 ته د نمونو وریانس وایي.

د څپرکي پوښتنې

1. دوه سکې څلور ځلې پورته واچوئ او د خط راتللو شمېر په پام کې ونیسئ:
   - ناڅاپه متحولونه د تابع په بڼه وښیئ.
   - د هر ځل د پورته اچونې احتمال نمونه‌یي فضا سره نسبت ورکړئ.
   - د تابع د تجمعي او مجزا احتمال ولیکئ.
2. که چېرې د یوې جوړې بوټونو د نقیصي احتمال $P = 0.1$ وي، د ناقصو بوټونو اوسط او معیاري انحراف په یوه نمونه کې $n = 400$ جوړو بوټونو پیدا کړئ.
3. د یوه شرکت په گدام کې 500 پایې کمپیوټرونه شته چې د هغې له جملې څخه یې 50 پایې نقص لري، یو اخېستونکی له هغې څخه 10 پایې کمپیوټرونه اخلي، ددې احتمال څومره دی چې هغه 8 پایې جوړ اخېستی وي؟
4. لاندې اطلاعات چې اوسط او معیاري انحراف د دوو پارامترونو په اړوند دی د نورمال توزیع د رسمولو لپاره ترې گټه واخلئ. لومړی یو افقي محور رسم کړئ او د $\bar{x}$, $\bar{x}+s$, $\bar{x}-s$, $\bar{x}+2s$ او $\bar{x}-2s$ ټکي پرې وټاکئ وروسته یو ټکی د h اختیاري جگوالي په اندازه د $\bar{x}$ له پاسه په پام کې ونیسئ او $\bar{x}+s$ له پاسه یو ټکی د $0.6h$ په جگوالي وټاکئ، یعنې یو ټکی چې مختصات یې $(\bar{x}+s, 0.6h)$ وي، څرنگه چې د نورمال منحني متناظر دی، همدا عمل په ځانگړې توگه په $\bar{x}-s$ هم سرته ورسوئ. اوس د $\bar{x}+2s$, $\bar{x}-2s$ د پاسه دوه ټکې د h او $0.15h$ په جگوالي په پام کې ونیسئ، پام وکړئ چې د نورمال منحني د دقیق رسمولو لپاره د $0.6067h$ او $0.1354h$ په ځای له $0.6h$ او $0.15h$ څخه گټه واخلئ. په پایله کې دا ټکي د یوه منحني په واسطه وصل او ووایئ چې دا منحني په کومو فاصلو کې محدب او په کومو فاصلو کې مقعره ده.
5. په یوه روغتون یوه څېړنه راښیي چې د مراجعینو شمېر د شنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ترمنځ 25 تنه دی. فرض کړئ چې د پواسن د احتمال توزیع په دې حالت کې صدق وکړي.
   - د روغتون د مراجعینو د احتمال توزیع د دوشنبې له ورځې، وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو تر منځ پیدا او گراف یې رسم کړئ؟ آیا دا توزیع خمېده ده؟
   - ددې توزیع د اوسط او معیاري انحراف مقدار په لاس راوړئ.
   - آیا دا ممکنه ده چې د دوشنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو ترمنځ به له 7 تنو څخه زیات روغتون ته مراجعه کړي وي؟ ولې؟
6. فرض کوو چې د یوه کتاب د یوه مخ د تېروتنو شمېر د پواسن د توزیع یا $\lambda = \frac{1}{2}$ پارامتر لرونکی دی د محاسبې احتمال یې مطلوب دی داسې چې:

- حد اقل یوه ټاپیي تېروتنه په هغه مخ کې وي.
- دقیقاً 5 ټاپیي تېروتنې په هغه مخ کې دي.
- د 3 او 6 ترمنځ ټاپیي تیروتنې په هغه کې وي.

7. فرض کوو چې د هغه پستون قطر چې د یوه اتوماتیکي ماشین په واسطه جوړېږي په نورمال یا اوسط ډول 25 ملي متر او معیاري انحراف یې 0.5 ملي متره توزیع شوی وي.
- کله چې د پستون قطر د 25.2 او 25.9 ترمنځ وي احتمال یې څومره دی.
- د پستونونو کوم نسبت د 25 ملي قطر لرونکی او له هغې څخه کم دی.
- که چېرې 1000 پستونه جوړ شي، له هغوی څخه څو دانې ددې وړ دی چې 24.07 ملي مترو څخه کم قطر ولري.
- د تولید شویو پستونونو څو فیصده د 24.56 ملي متره معادل قطر یا له هغه څخه زیات لري.

8. که چېرې $x_1, x_2, \ldots, x_n$ د x ناڅاپه متحول یوه تصادفي نمونه وي ایا د $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$، $\frac{x_1+x_2}{x_4}$ او $x_1+3x_2-x_3$ تابع آماره دی.

9. که چېرې x یو ناڅاپه متحول او د μ او δ^2 پارامترونه وي آیا د $\frac{3x_1-2x_3-\delta}{8\mu+x_2}$، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$ او $x_1+x_3-\mu$ توابع μ او δ^2 مجهول وي آیا پورتنیو تابعگانو ته احصائیه ویلی شو؟

10. ټولنه د برق په څلورو ډلو کې گډون لري، که د عمرونو اوږدوالی یې د ساعتونو په حساب سره عبارت له 108 104 112 103 دي یوه ډله ناڅاپه ټاکو، فرض کوو چې د x ناڅاپه متحول ټاکل شوی د ډلو د عمر اوږدوالی راوښیئ:
- د x د احتمال توزیع ولیکئ.
- $E(x)$ او $V(x)$ محاسبه کړئ.

11. د یوه ښار د وگړو د گڼې اندازه چې د غیرنورمال توزیع $\mu = 90$ افغانۍ اوسط او د 25 افغانۍ معیاري انحراف سره دی که چېرې د 225 کسیز د وگړو د یوې نمونې د گټې مجموعه له 2100 افغانیو څخه زیاته وي، احتمال یې څومره دی؟

12. پوهېږو چې 56% وگړي د A نوماند طرف دار دی، څومره ددې احتمال شته چې $n = 50$ دوهگونې یوه نمونه کې حداقل 60% وگړي د A نوماند طرفدار وي.

13. په 12 مثال کې که چېرې $P = 0.4$ وي، یعنې ددې احتمال چې یو وگړی د A کاندید طرفدار وي 0.4 دی، یوه $n = 200$ گونه نمونه وټاکو، نو څومره ددې احتمال شته چې لااقل 100 وگړي د A کاندید طرفدار وي.

اتم څپرکی

احتمالات

بېلې شوې(غیرمتمادي) او نښتې(متمادي) فضاګانې

په مخامخ شکلونو کې د لومړي او دویم نل څخه په وار سره اوبه په څمکه توییږي ویلای شئ چې له دې نلونو څخه په څمکه د اوبو د څاڅکو د توییدو توپیر په څه کې دی؟

- د یو رمل په اچولو سره ویلای شي چې د نمونه یي فضا ټولې ممکنې پایلې کومې دي؟
- آیا له ونې څخه د یوې پڅې منې د لویدلو د وخت وړاندوینه کولای شئ چې وروسته له څو ثانیو، دقیقو او یا ساعتونو څخه پر څمکه ولوېږي؟
- نظر وخت ته د منې د لویدلو نمونه یې فضا ولیکي.
- د رمل دانې د اچولو تجربې نمونه یې فضا د عناصرو شمېر او له ونې څخه د منې د لوېدلو وخت څنګه پرتله کولای شي.

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

د یوې ناڅاپه تجربې نمونه یې فضا عبارت له هغه ټاکلي او یا نا ټاکلي سټ یا مجموعې څخه ده چې ځینې عناصریې د شمېر وړ او ځینې یې د شمېر وړ نه وي.

هغه نمونه یې فضاګانې چې عناصر یې د شمېر(countable) او تشخیص وړ وي د غیرمتمادي نمونه یې فضا په نامه یادېږي او هغه نمونه یې فضاګانې چې عناصر یې د شمېر وړ نه وي د نښتې(متصلې) یا متمادي نمونه یې فضا په نامه یادېږي.

لومړی مثال: له لاندې نمونه یې فضاګانو څخه کومه یوه نښتی(متمادی) او کومه یوه غیرمتمادی ده.

الف: د دوو رمل دانو اچول

ب: د 8 او 12 ترمنځ د یوه حقیقي عدد ټاکل.

ج: له 30 زده کوونکو څخه د 3 تنو ټاکل

د: د یوې کُرې د حرارت د یوې درجې لوړېدل د 100 درجو د سانتي ګرېډ څخه تر 1000 درجود سانتي ګرېډ پورې.

هـ : د 30° او 45° زاویو ترمنځ یوه زاویه ټاکل.

حل: څرنګه چې (الف او ج) نمونه‌یي فضاګانې د محدودو غړو له شمېر څخه جوړې شوې، نو غیرمتمادي فضا ولې (ب، د او هـ) له نامحدود حقیقي عددونو څخه تشکیل(جوړ) چې د شمېر وړ نه دي، نو نښتی یا متمادی فضاګانې دي.

دویم مثال: خیبر د کور د ګلانو د اوبولو لپاره یو واټرپمپ اخیستی دی.

که چېرې د واټرپمپ عمرد ساعت له مخې په پام کې ونیسو، په دې حالت کې د واټرپمپ د عمر د اوږدوالی نمونه-یي فضا چې کېدای شي هر مثبت حقیقي عدد د واټرپمپ د ورانېدو په صورت کې د کار د مودې قیمت شي، په دې ډول د داسې ناڅاپه حادثې پېښېدل هر حقیقي عدد کېدای شي چې دا نمونه‌یي فضا یوه غیر متمادي، یا نښتی نمونه یي فضا د، یعنې { t د واټرپمپ د ورانېدو وخت، $S = \{t \in IR : t \geq 0$ چې په پورتنۍ نمونه یې فضا کې t د واټرپمپ د عمر اوږدوالي راښي.

یادونه:

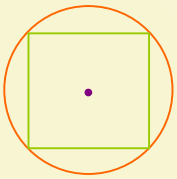
1- د لومړی مثال الف او ج جزونو کې محدودې نمونه‌یي فضاګانو څخه بحث شوی چې عناصر یې د شمېر وړ دي، د ب او د جزونو کې نامحدودې نمونه‌یي فضاګانې ذکر شوي چې عناصر یې د شمېر وړ نه دي، نو ځکه ټول مثبت حقیقي عددونه اخېستلای شي.

2- په دویم مثال کې نمونه‌یي فضا متصله یا غیر محدوده ده چې د حقیقي عددونو د انټروال په توګه ښودل کېږي.

پوښتنې

1- یو غشي وېشتونکی د یوه دایروي د سک په دننه چې وړانګه یې r ده، په پام کې ونیسي. د غشي د لګېدو ځای د دایرې په دننه کې چې مرکز ته نژدې ولګېږي، د هغې نمونه یې فضا ارایه کړې. وواياست چې دا څنګه یوه نمونه یې فضا ده.

2- په مخامخ شکل کې په ناڅاپي یا تصادفي ډول د دایرې په دننه کې یو ټکې و ټاکئ، احتمال ددې شته چې مطلوب ټکې د مربع په دننه کې وي.



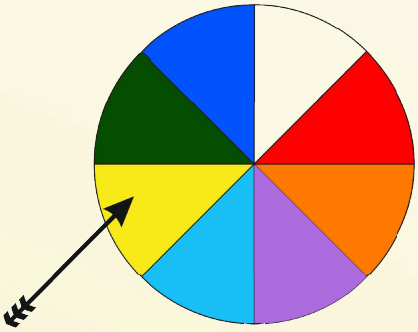
3- یو طبیعي دوه رقمی عدد و ټاکئ، هغه احتمال پیدا کړئ چې عدد د 4 مضرب وي.

هم چانسه پېښې

د یوې نورمال رمل دانې په اچولو کې د (1) او یا (5) شمېرې مخ ته راتللو لپاره شرط څه دی؟

د 2 او 5 شمېرې د راتللو چانس یو له بل سره څه اړیکه لري؟

د مخامخ شکل په څېر یوه دایره په پام کې ونیسئ، که چېرې په راکړې شوې دایره کې یو ښکاري غشي وولي لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- په سور رنګه ناحیه او شین رنګه ناحیه کې د غشې لګېدل یو له بل سره څه اړیکه لري؟
- د غشې د لګېدو چانس د کچې په اړه د نارنجي او سپینو رنګونو سره په پرتله باندې څه ویلای شي؟
- په تور رنګ د غشې د لګېدو چانس څومره ده؟
- د تجربې، نمونه‌یې فضا ولیکئ.
- لومړني ناڅاپه پېښې لست کړي او د هر یوه احتمال پیدا کړئ ؟
- د لومړنیو پېښو د احتمالونو د مجموع په برخه کې څه ویلای شي؟

د پورتني فعالیت له اجرا کولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

هغه لومړنی ساده پېښې چې د هغوی د پېښېدلو چانس د یوې تجربې په اجرا کولو کې سره برابر وي، د هم چانسه پېښو په نامه یادېږي، لکه:

که چېرې $S=\{e_1,e_2,\ldots e_n\}$ یوه نمونه یې فضا وي، نو $\{e_i\}$ د هر $i=1,2\ldots n$ لپاره یوه ناڅاپه لومړني پېښه ده که $0\le P(\{e_i\})\le 1$, $i=1,2,\ldots n$ دي.

سربېره پر دې د لومړنیو پېښو د احتمالونو مجموع مساوي له یوه سره ده.

$$P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\ldots+P(\{e_n\})=\sum_{i=1}^{n}P(e_i)=1$$

مثال: خلور تنه په یوه لوبه کې ګډون کوي. تاسې د هر یوه د ګټلو احتمال پیدا کړئ په داسې حال کې چې نمونه‌یي فضا هم چانسه وي.

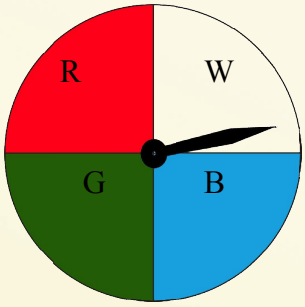
حل: که چېرې $S = \{a, b, c, d\}$ نمونه یې فضا وي، نو د هرې ناڅاپه لومړنۍ پېښې احتمال $\frac{1}{4}$ دي.

لرو چې:
$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

پاسنۍ لومړنۍ پېښې سره هم چانسه دي.

پوښتنې

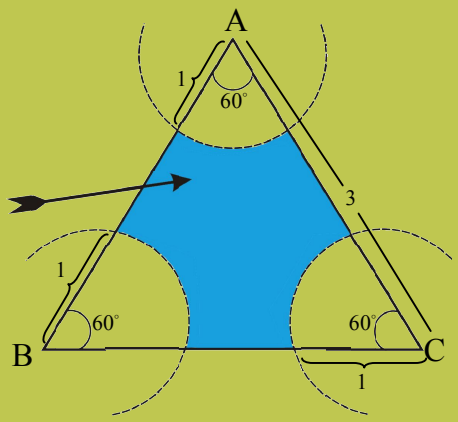
1- مخامخ شکل په پام کې ونیسي ، که چېرې د عقربې(ستنې) د درېدلو احتمال په آسماني او سپېن رنګ 0.30 او د سره رنګ پرمخ 0.26 وي، د شنه رنګ پرمخ د درېدلو احتمال به څومره وي؟



2- لاندې د کثرت جدول د رمل یوې دانې د اچولو لپاره په پام کې ونیسي. هغه احتمال پیدا کړی چې د رمل دانه (5) شمېره راشي.

د رمل شمېره	1	2	3	4	5	6
کثرت	7	9	8	7	3	10

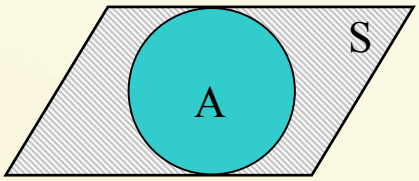
3- د رمل یوه دانه داسې ډکه شوی چې د جفت شمېرو د راتللو احتمال د طاق شمېرو دوه برابره وي، که یو چا په شرط وهلو کې(5) شمېره ټاکلي وي، د هغې احتمال پیدا کړئ.



د نښتې یا پیوسته(متمادي) فضاګانو احتمـال

د یوه متساوي الاضلاع مثلث دننه چې هـره ضـلعه یې 3 واحـده ده، یـو غـشي ولـو، ددې احتمـال چې د غـشي د لګېدلو ټکې د مثلث د هـر رأس نـه د یـو واحـد پـه انـدازه لوی وي، څو دی؟

- آیا ویلای شي چې د یوې ټوټه کرښې، د یوې مستوي د یوې برخې او یا د فضا د حجم څو ټکې یـو پـر بـل پسې موجود دی؟
- د هغو ټکو د پېښېدلو احتمـال چې د A پـه برخـه کې چـې د S د لـوېې برخـې فرعـي مـساحت دی، لکـه څرنګـه چـې پـه شـکل کـې لیـدل کېږي د A او S د ساحو د مساحتونو له نسبت سره څه اړیکه لري؟



- آیا کولای شئ دا مسئله په فضا کې د یـوه جـسم حجـم د یـوې برخـې د احتمـال د محاسـبې لپـاره عمومیـت ورکړئ؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله لاسته راځي.

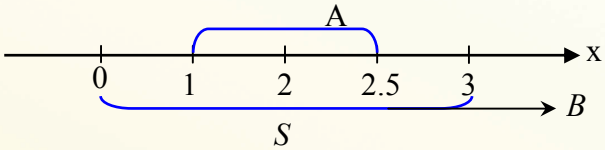
پیوسته(متمادي) نمونهیي فضا د نامعینو ټکو مجموعه ده چې شکل یې د عددونو پـه محـور ، پـه مـستوي کـې لکـه سطح او یا په فضا کې لکه حجمونه دی، څرنګه چې ددې ټکو ښـوونه ممکـن نـه ده، نـو د احتمـال د نـسبت پیـدا کولو لپاره د ټوټه کرښو د اوږدوالي، د اشکالو سطحو او یا د جسمونو له حجم څخه استفاده کوو.

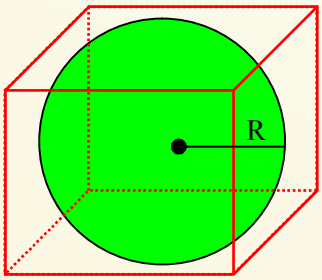
معمولاً د عددونو له محور څخه په ګټه اخیستنې سره د x یو متحول، د یـوه مـساحت د یـوې برخـې لپـاره د دوو متحولینـو لکه x او y او په همدې ترتیب د حجمونو لپاره له دریو متحولونو ، لکه: y, x او z څخه ګټه اخلو.

لومړی مثال: د عددونو پـه محـور د $(0,3)$ پـه انټـروال کـې د x یـو ټکـی پـه ناڅـاپي یـا اتفـاقي ډول ټاکو ددې احتمـال پیدا کړئ چې $1 < x < 2.5$ وي؟

حل: د حقیقي عددونو محور رسم کړئ د S او A فاصلې د هغه پر مخ ټاکو، د شکل په پام کې نیولو سره د A پېښې د پېښېدو احتمال څخه لرو:

$$P(A)=\frac{\text{د A ټوټه کرښې اوږدوالي}}{\text{د B ټوټه کرښې اوږدوالي}}=\frac{2.5-1}{3-0}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}$$





دویم مثال: په ناڅاپه ډول یو ټکی د یوه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې 2 واحده وي ټاکو ددې احتمال پیدا کړئ چې نوموړي ټکې د مکعب د محاطي کُرې په دننه کې وي.

حل: که چېرې کره د هغه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې a واحده ده، محاطه وي، نو د کرې شعاع $r=\frac{a}{2}$ کېدای شي:

A ناڅاپه پېښه د کرې د حجم او S نمونه یي فضا سره مساوي چې د مکعب حجم دی، نو لرو:

$$r=\frac{a}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$P(A)=\frac{\text{د کرې حجم}}{\text{د مکعب حجم}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}=\frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3}=\frac{\pi}{6}$$

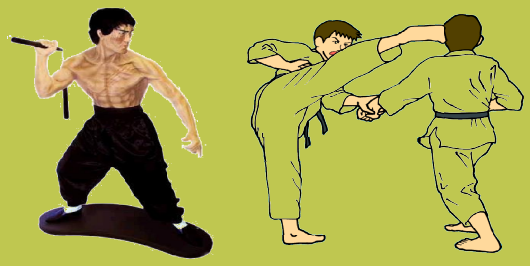
پوښتنې

1- د حقیقي عددونو په محور د A او B دوه ټکي په ناڅاپي یا تصادفي ډول داسې ټاکو چې $-2\le B\le 0$ او $0\le A\le 3$ وي، ددې احتمال پیدا کړئ چې د d واټن د A او B ترمنځ وي او له 3 واحدو څخه لوی وي.

2- که چېرې یو ټکی په ناڅاپي یا تصادفي ډول د دایرې د سطحې پرمخ وټاکو، ددې احتمال پیدا کړي چې نوموړي ټکي نظر د دایرې محیط ته د دایرې مرکز ته نژدې وی.

مشروط احتمـال

له یوه ولایت څخه (20) تنـه نارینـه او ښځینه زده کـوونکی د کانکور په آزمویـنه کې د طب پوهنځي تـه بریـالي شـوي دي، د هغوي له جملې څخه یې 5 تنه ښه کاراته بازان دي: که په 15 تنو بریالیو نارینه وو کې 4 تنه یې ښه کارته بـازان وی. د نوموړو محصلینو له مینځ څخه پـه اتفـاقي ډول یـو تن ټاکو احتمـال د دې پیدا کړئ چې:



- ټاکل شوی محصل یوه کارټه بازه نجلی وي؟
- په پورتني سوال کې هغه نجلی په کوم شرط سره د طب پوهنځي ته بریالی شوي ده؟

فعالیت

له 2500 زده‌کوونکو څخه 1600 تنه یې په مطالعه کولو عادت لري.

چې لـه 80% زده‌کوونکـو څخـه یـې 70% نارینـه زده‌کـوونکي وي او پـه مطالعـه کولـو عـادت ولـري، کـه د ټولـو زده‌کوونکو لپاره احتمـال یو شان وي، د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره د یوه تن زده‌کـوونکی ټاکـل د ښـوونځی لـه زده‌کوونکو څخه:

R: له مطالعې سره عادت لري.

M : نارینه زده‌کوونکي دی.

F: یوه ښځینه زده‌کوونکې ده.

د لاندې پوښتنو په حل فکر وکړئ:

- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوي زده‌کوونکی نارینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوی تن یوه ښځینه وي؟
- ددې احتمـال پیدا کړئ چې ټاکل شوي زده‌کوونکي یو نارینه وي په دې شرط چې په مطالعه عادت وي.

د پورته فعالیت د سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

په حقیقت کې د هغه نارینه زده‌کوونکي د ټاکلو احتمـال په دې شرط چې په مطالعه عادت ولري.

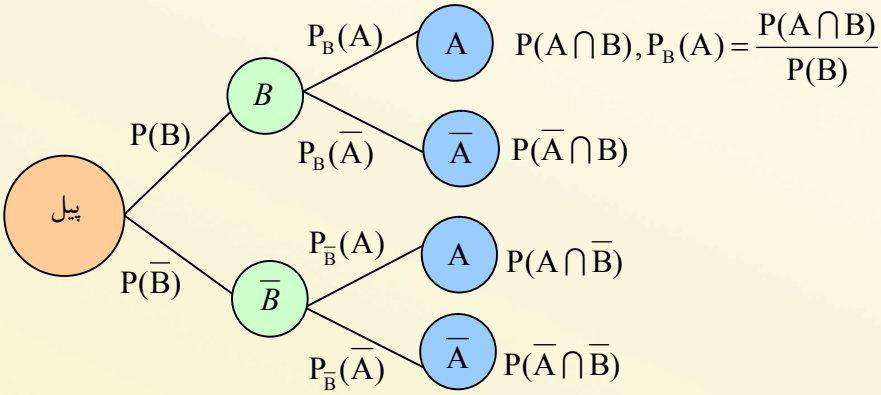
د لاندې احتمالات وېش له حاصل څخه عبارت دی که چېرې Ω ټوله نمونـه‌يـي فـضا او $|\Omega|$ نمونـه‌يـي فـضا د عناصرو شمير وي، نو لرو:

$$P_R(M)=\frac{P(M\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{|M\cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|R|}{|\Omega|}}=\frac{|M\cap R|}{|R|}=$$ د هغه نارينه زده‌کوونکو د ټاکلو احتمـال چې په مطالعه عادت وي.

$P_R(M)$ د هغې پېښې له احتمـال څخه عبارت دی چې ټاکلي زده‌کوونکي نارينه وي، پـه دې شـرط چې هغـه پـه مطالعه عادت وي.

تعريف: که چېرې S نمونه‌يـي فـضا A او B د نمونـه‌يـي فـضا دوې ناڅـاپې پيـښې وي، پـه داسـې حـال کـې چې $P(B)\neq 0$ وي. پـه دې حالـت کـې نومـوړی احتمـال يعنـې $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ چې د A ناڅـاپې پېـښې احتمال نظر د B ناڅاپې پېښې ته مشروط احتمـال بلل کېږي.

د پورته تعريف په پام کې نيولو سره نظر د مسير لومړي قاعدې ته د ونه‌ييز ديګرام په مرسته هم په لاس راوړای شو.



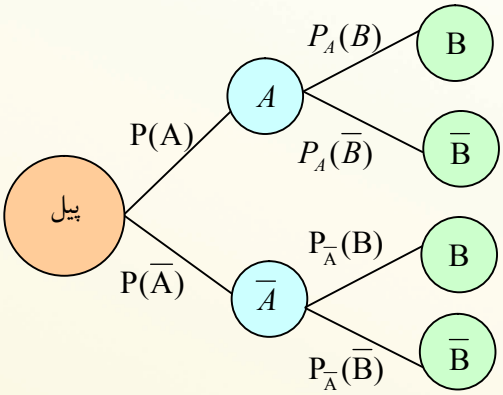
د مشروط احتمـال له فورمول څخه لاندې مهمې پايلې په لاس راځي:

1- د مسير له لومړی قاعدې څخه لرو: $P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$

د مسير له دويمې قاعدې څخه په ګټه اخيستنې سره لرو: $P(A\cap \overline{B})=P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$

$$P(A)=P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$$

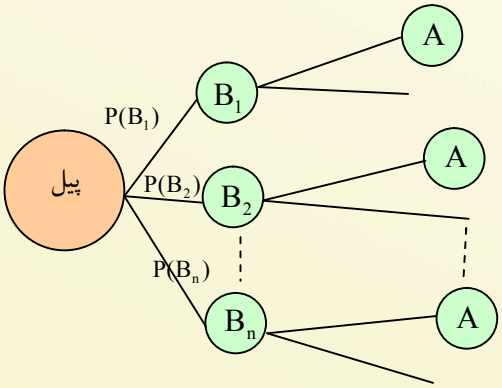
2- ونه‌ييزه(درختي) ديګرام له مخې $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$



له لومړي پایلې څخه په لاس راځي چې: $P_A(B)=\dfrac{P_B(A)\cdot P(B)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\bar{B})\cdot P_{\bar{B}}(A)}$

3- که چېرې نوموړی حالت د Ω نمونه یي فضا ناڅاپي پیښو د $B_1, B_2, ..., B_n$ اختیاري وېش لپاره عمومیت ورکړو. د ونې په ډول د دیاګرام په پام کې نیولو سره کولای شو، لاندې فورمول په لاس راوړو.

$$P_A(B_i)=\frac{P_{B_i}(A)\cdot P(B_i)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}=\frac{P(A\cap B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} \qquad i=1,2,...,\ n$$



لومړی مثال: یو زده کوونکی ښوونځي ته د تللو لپاره 50% هره ورځ د موټر څخه ګټه اخلي چې 70% په ټاکلي وخت ښوونځي ته رسېږي. په منځني ډول نوموړي 60% په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضرېږي که چېرې پیښې:

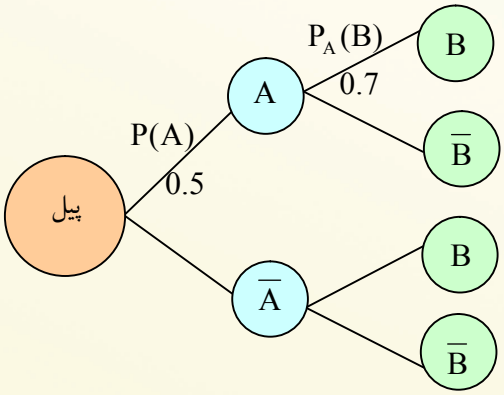
A: د موټر په واسطه راتلل B: په ټاکلي وخت رسېدل

وي په دي صورت کې د A مشروط احتمال نظر B ته یعنې $P_B(A)$ مطلوب دی؟

حل: د نوموړي احتمال د پیدا کولو لپاره د ونهییز یا درختي دیاګرام په پام کې نیولو سره نظر فورمول ته په لاندې ډول په لاس راځي:

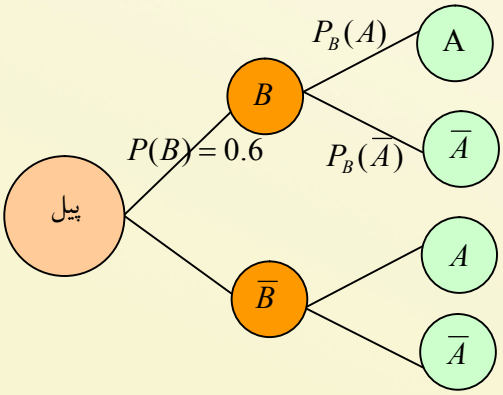
$$P_B(A)=\frac{P(A)\cdot P_A(B)}{P(B)}=\frac{0.5\cdot 0.7}{0.6}=0.5833=58.33\%$$

نو په دې اساس د موټر په واسطه د رسېدلو احتمال په دې شرط چې په ټاکلي وخت په ښوونځي کې وي 58.33% سلنې سره برابر دی.



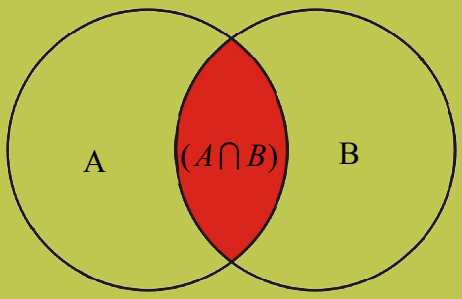
پوښتنې

له لاندې دیاګرام څخه په ګټه اخیستنې سره د مشروط احتمال په ټاکلي وخت رسېدل ښوونځي ته په دې شرط چې د موټر په واسطه سرته رسیدلي وي، یعنې $P_A(B)$ د ناڅاپه پیښې احتمال ښوونځي ته په ټاکلي وخت رسیدل، په دې شرط چې د موټر په واسطه نه وي راغلي یعنې $P_A(B)$ مطلوب دي.



د حاصل ضرب اصل

د A ناڅاپه پیښې مشروط احتمال په B ، د A او B ناڅاپه پیښې احتمال یو له بل سره څه اړیکه لري؟

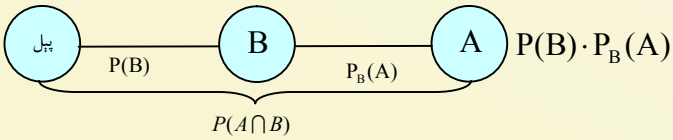


- که چېرې A او B دوې ناڅاپه پیښې د S په نمونه یې فضا کې وي.
- د A ناڅاپه پیښې مشروط احتمال B ته ولیکئ.
- د ونه‌ییز دیاګرام څخه په ګټه اخېستنې سره د $P(B) \cdot P_B(A)$ قیمت په لاس راوړئ.
- د $(A \cap B)$ ناڅاپه پیښو احتمال د A او B ناڅاپه پیښو څخه او یا د A مشروط له B څخه په ګټه اخیستنې سره ولیکئ.
- د فعالیت د دوو پورتنیو بندونو د محاسبې پایلې یو له بل سره پرتله کړئ.
- آیا کولای شو چې موضوع د ډېرو ناڅاپه پیښو لپاره عمومیت ورکړو.

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو.

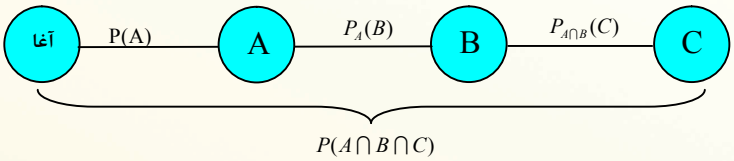
د S په یوه نمونه یې فضا کې د A او B د دوو ناڅاپه پیښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف په پام کې نیولو سره لرو: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$

دا مسئله کولای شو چې د ونه‌ییز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړو:



$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مطلب د دریو A، B او C پیښو لپاره په لاندې ډول پراخوو.



$$\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cap B}(C)$$

پورتنۍ قاعده د حاصل ضرب په نامه یادېږي او کولای شو، هغه د یو شمېر اختیاري ناڅاپي پیښو لپاره هم په لاس راوړو.

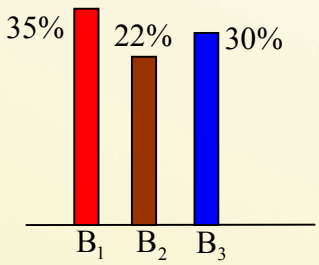
مثال: د B_1 , B_2 او B_3 دریو ولایتونو په پارلماني ټاکنو کې چې د هر یوه لپاره د ټاکنو د ګډون کوونکو فیصدي او د جمهوري ګوند برخه فیصدي ورکړل شوې ده؟

په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکي او یا رایې اچوونکي جمهوري ګوند ټاکلي وي.

حل: په لاندې ډول ناڅاپي پیښې تعریف او نوموو:

V : هغه رایې ورکوونکي چې جمهوري ګوند یې ټاکلی دی.

B_i : د ولایت رایې ورکوونکي B_i – (i-ام) ... i=1,2,3 لاندې ارقام ورکړل شوي وي.



ولایت	د رای ورکوونکو فیصدي	جمهوري ګوند ته رایې ورکوونکي
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30

د B_i $(i=1,2,3)$ ناڅاپه پیښې په حقیقت کې یې د S نمونه یي فضا یو وېش جوړ کړی چې د هغوی لپاره صورت نیسي.

1- B_i یو له بل سره دوه په دوه مستقل او ګډ عناصر نه لري.

2- د S نمونه یي فضا لپاره $S=B_1\cup B_2\cup B_3=\bigcup_{i=1}^{3}B_i$ دی، نو $B_i\cap V$ $(i=1,2,3)$ پیښه یو له بل سره یو په یو مستقل د هغوی لپاره صورت نیسي. $V=\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)$

له دې اړیکې څخه کولای شو، د دواړو خواوو د احتمال لپاره ولیکو:

$$P(V)=P\left(\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)\right)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i\cap V)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P_{B_i}(V)$$
$$=P(B_1)\cdot P_{B_1}(V)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(V)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(V)$$
$$=0.332\cdot 0.35+0.465\cdot 0.22+0.203\cdot 0.3=0.1162+0.1023+0.0609$$
$$=0.2794=27.94\%$$

تعریف: که چېرې د $B_1, B_2, ..., B_n$ څرنګه چې $P(B_i)\neq 0$ وی $i=1,...n$ پیښو عمومي حالت د S په نمونه‌یي فضا کې یوه پېښه وي، نو $P(A)$ د کامل احتمال په نامه یاد او د A اختیاري ناڅاپې پیښې لپاره لرو:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

د مشروط احتمال د تعریف، د اصل حاصل ضرب له قضیې څخه د کامل احتمال د مسئلې په پام کې نیولو څخه لاندې فورمول چې د بائیز(Baye's) د فورمول په نامه یادېږي، په آسانۍ سره په لاس راځي، داسې چې B_i چې $i=1,...n$ د S نمونه یي فضا یوی پېښې لپاره چې $P(B_i)\neq 0$ ، $i=1,...n$ د A د ناڅاپه پیښې احتمال چې $P(A)\neq 0$ سره وي، لرو:

د بائیز (Bayes)فورمول:

$$\boxed{P_A(B_i)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}}$$

د بائیز فورمول ډېر استعمال لري لکه د $n=2$ لپاره $B_1=\overline{B}$, $B_2=\overline{B}$ په پام کې ونیسو، په حقیقت کې B_1 او B_2 د S نمونه یي فضا پېښې وي لرو:

$$P_A(B)=\frac{P(B)\cdot P_B(A)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

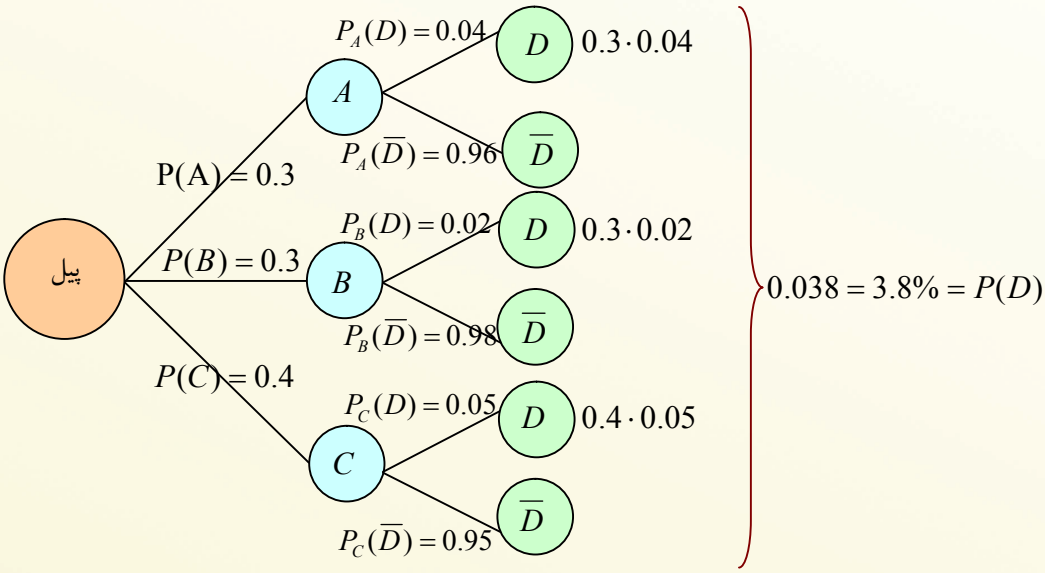
پورتنۍ فورمول د $n=2$ د بائیز له فورمول څخه عبارت دي.

مثال: په یوه فابریکه کې د A، B او C درې ماشینونه په ترتیب سره 30% ، 30% او 40% برخه د برق ګروپونه تولیدوي. که چېرې په ماشینونو کې د ګروپونو د خرابېدو کچه په ترتیب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړې ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي، مطلوب دي:

a) ددې احتمال چې یو اخېستل شوی ګروپ وران یا خراب وي.

b) په کوم احتمال خراب خرڅ شوی ګروپ د C ماشین پورې اړه لري.

c) یو نوی تولید شوی ګروپ لرو، په کوم احتمال سره به د B په ماشین پورې مربوط وي.



د b جز:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

د c جز:

$$P_{\overline{D}}(B) = \frac{P(\overline{D} \cap B)}{P(\overline{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95}$$

$$= \frac{0.294}{0.288 + 0.294 + 0.38} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

پوښتنې

1- د 1000 دانو رملونو په منځ کې د یوې دانې په شپږ واړه مخونه یوازې د 6 شمېره وهل شوې ده. د هغوې له منځ څخه یوه ناڅاپه د رمل دانه ټاکل شوي او درې ځلې اچول شوي ده. درې ځلې 6 راغلي. پیدا کړئ، هغه احتمال چې په ټاکل شوي دانه په سم ډول شمېرې وهل شوي وي؟

د ناڅاپه پېښو استقلالیت

له مشروط احتمال څخه پوهیږو چې د A او B دوو ناڅاپو پېښو یا حادثو د B د پیښې پېښدل د A په پېښه تاثیر اچوي په دې سبب لازمه ده چې د احتمال د محاسبې په وخت کې د A او B پېښه په پام کې ونیسو.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

د هغه حالت لپاره چې د A ناڅاپه پیښې پېښدل پر B ناڅاپه پیښې اغېزه ونه لري او بر عکس.

د A او B د ضرب د حاصل احتمال د $A\cap B$ پیښې له احتمال سره څه اړیکه لري.

تعریف: د A او B دوې ناڅاپه پیښې چې یوه پر بله اغیزه لرونکي نه وي د ناڅاپه مستقلو پیښو په نامه یادیږي.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

- د S نمونه یي فضا او د A او B دوې یوه له بلې څخه مستقلې پیښې چې د S نمونه یي فضا کې شامل وي، په پام کې ونیسئ.
- د مشروط احتمال فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B یوه له بلې څخه مستقلې دوې پیښې وي د $P_B(A)$ او P(A) احتمالونه یو له بل څخه څه توپیر لري؟
- د P(A∩B) ناڅاپه پیښې احتمال له څه سره مساوي دي؟
- د P(A∪B) = P(A) + P(B) − P(A∩B) د پیښو د احتمال له فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B گډ ټکی ونه لري، څه پایله اخلي؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

1: د A او B دوې پیښې مستقلې بلل کېږي، که چېرې:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

2: که چېرې A او B پیښې د گډو ټکو لرونکي نه وي، نو

$$A\cap B=\emptyset \Rightarrow P(A\cap B)=0$$
$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$ (د جمع د حاصل اصل)

لومړی مثال: که چېرې د یوه ښوونځي د زده کوونکو د سترگو رنگ او ذکاوت یو پر بل پرته له اغېزې فرض شوي وي. د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره په ناڅاپه ډول د یوه زده کوونکي ټاکلو لپاره:

H: ټاکل شوي تن یو هوښیار ذکي زده کوونکي وي.

B: ټاکل شوي زده کوونکی توري سترگې ولري.

هغه احتمال پیدا کړئ چې ټاکل شوي زده کوونکی په ناڅاپه توگه هوښیار ذکي او توري سترگې ولري.

حل: ددې لپاره چې ټاکل شوي زده کوونکی هوښیار او توري سترگې ولري لیکلای شو:

څرنګه چې $P_B(H)=P(H)$ سربېره پردي $P_B(H)=\frac{P(B\cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B\cap H)=P(H)\cdot P(B)$$

عمومي حالت: د A_1 , A_2 , ... A_n , $(n\geq 2)$ ناڅاپه پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو یا څو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې احتمالاً یوه له بلې سره تړلي نومول کېږي.

پایله:

1: پاملرنه باید وشي چې د ضرب د حاصل له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره په لاندې متقاطع جدول کې هم کولای شو چې $A\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{B}\cap\overline{A}$ او $\overline{B}\cap A$ ناڅاپه پېښو احتمالي پایلې د A او B پېښو لپاره چې احتمالونه یې a او b وي، په آسانۍ په لاس راوړو. د A او B د مستقل والي څخه پوهېږو چې د A او $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ او B په پای کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ هم یوه له بلې څخه مستقلې دي، نو لرو:

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A\cap B)=a\cdot b$	$P(A\cap\overline{B})=a(1-b)$	a
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=b(1-a)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=(1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2: د A ، B او C درې ناڅاپه پېښې چې یوه له بلې څخه مستقلې دي، لرو:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

دویم مثال: په یوه کڅوړه کې دوې سپینې او دوې تورې مرۍ پرتې دي. دوې مرۍ یوه په بلې پسې له کڅوړې څخه پورته کوو، په داسې حال کې چې:

a- د لومړۍ مرۍ د پورته کولو نه وروسته هغه بېرته په کڅوړه کې ږدو.

b- پرته له دې چې مرۍ واپس کېښودل شي.

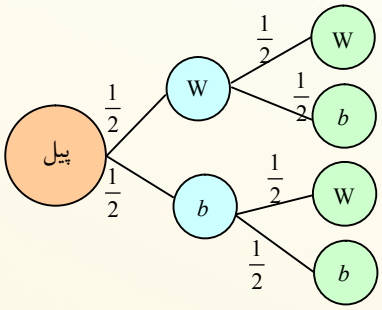
د A پېښه: په لومړۍ ځل سپینه مرۍ راووزي. B: دویم ځل مرۍ سپینه وي.

له یوې بلې څخه مستقلې یا تړلې (وابسته) دي.

حل:

a) څرنګه چې $P(A)=\frac{1}{2}$ او $P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ وي او

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}$ دي، نو A او B یوه له بلې څخه مستقلې دي.

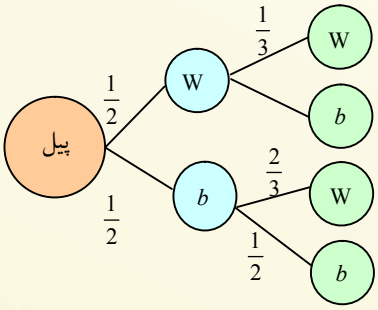


b) څرنګه چې:

$$P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\ ,\ P(A)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

نو A او B یوه له بلې څخه ترلی یا وابسته دي.



دریم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځایونه چې په نښه شوي دي، ډک یې کړئ:

	B	$\overline{B}$	
A	0.12	$P(A\cap\overline{B})=?$	?
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=?$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=?$	?
	?	0.6	

حل: څرنګه چې $P(\overline{B})=0.6$ دي، نو لرو:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.6=0.4$$

$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$

$$\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.70$$

او د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

په همدې ترتیب په جدول کې د قیمتونو په وضع کولو سره مسئله تکمیلېږي.

پوښتنې

یو سټ چې عناصر یې 5,3,2 او 30 دی د یوه رقم د انتخاب احتمال یې 0.25 دی په ناڅاپي ډول له نوموړی سټ څخه یو رقم انتخابوو، که چېرې A_k ناڅاپه پېښه د هغه رقم چې انتخاب شوی او د تقسیم قابلیت په k ولري، آیا A_2 , A_3 او A_5 ناڅاپي پېښې دوه په دوه مستقل دي او که نه؟

د څپرکي مهم ټکي

بېلې شوې(غیرمتمادي) نمونه یي فضا:

هغه نمونه یي فضا چې عناصر یې د شمېر او تشخیص وړ وي، د غیرمتمادی نمونه‌یي فضا په نامه یادېږي، لکه د رمل یا د سکې اچولو تجربي نمونه‌یي فضا.

نښتي(متمادي) نمونه یي فضا:

هغه نمونه یي فضا چې عناصر یې د شمېر وړ نه وي د پیوسته یا متمادي نمونه‌یې فضا په نامه یادېږي چې د حقیقي عددونو پر محور د فاصلې په بڼه او یا په فضاکې د هندسي شکلونو یا حجمونو په ډول څرګندېږي.

هم چانس پېښې:

د یوې نمونه یي فضا لومړني پېښې چې د هغوی پېښې د تجربې په پای کې په برابر احتمال پېښېږي، هم چانسه پېښې بلل کېږي. د هم چانس پېښو د احتمال مجموع له یوه سره مساوي ده.

د نښتي(پیوسته) فضا احتمال:

د ټوټه کرښو، سطحو او حجمونو مساعد حالتونه د یوې پام وړ ناڅاپې پېښې لپاره په یوه تجربي نمونه‌یي فضاکې شامل ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دي د متصلې فضا له احتمال څخه.

مشروط احتمال:

که چېرې A او B د S، د نمونه‌یي فضا دوې ناڅاپه پېښې چې $P(B) \neq 0$ وي په دي حالت کې $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ته د A ناڅاپه پېښې د مشروط احتمال په نامه یادېږي په دي شرط چې د B پېښه له مخکې پېښه شوي وي.

یوه له بلې څخه مستقلې پېښې:

د A او B دوه ناڅاپه پېښې یوه له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

د څپرکي پوښتنې

1. د لاندې نمونه يي فضاگانو څخه کومه يوه سره نښتي يا پيوسته او کومه يوه غيرمتمادي ده؟

الف: د يوې رمل دانې اچولو تجربه

ب: د يوې سکې د اچولو تجربه

ج: د يو غشي لگېدل په يوه دايره

د: د يوې فلزي ميلي د اوږدوالي زياتېدلو تجربه نظر حرارت ته

2. د يو چارتراش چې اوږدوالی يې L دی په ناڅاپه ډول په سور اره کوو، تر څو دوه برخې شي څومره احتمال شته چې د کينې اړخ اره شوې برخه د ښي اړخ له درې برابره څخه کوچنی وي.

3. د يوه خصوصي شرکت يو کارگر هره ورځ د 8 او 8:50 ساعتونو په منځ کې کورته نژدې تم ځاي کې چې د مامورينو په موټر کې کارته د تگ لپاره گډون وکړي او په 8:15 ، 8:30 او 8:45 وختونو تم ځای ته رسېږي څومره احتمال ددې شته چې نوموړې تن له 5 دقيقو څخه لږ منتظر پاتې شي.

4. د [0.3] ترلې فاصلې څخه په ناڅاپه ډول دوه عددونه ټاکو، ددې احتمال پيدا کړئ چې د عددونو مجموعه د 5 څخه کوچنی او له 2 څخه لويه وي.

5. په ناڅاپه ډول يو ټکی د مخروط دننه چې د قاعدې شعاع يې R او جگوالی $R\sqrt{3}$ دی ټاکو، پيدا کړئ ددې احتمال چې ټکی د محاطي کري دننه په دې مخروط کې قرار لري.

6. د يو خودکار قلم خرابېدل دوه دليلونه لري:

1- د ميخانيکيت خرابېدل

2- د خودکار د نيچې خرابېدل

که چېرې د يو خودکار قلم د خرابېدو احتمال 0.088 او ددې احتمال چې د خرابېدو دليل (1) ، شمېره وي مساوي په 0.05 او د دويم نقص احتمال مساوي په 0.002 وي وخېړئ: چې دوه پورتني دلايل مستقلې او يا غير مستقلې پېښې دي؟

7. خيبر غواړي هغه څلور کلي‌گانې چې په جيب کې يې لري او سره يو شان دي د کورد دروازې قلف خلاص کړي په کوم احتمال سره وروسته د دريمې کلي له آزمويلو سره چې له جيب څخه يې را باسي د قلف اړوند کلي وي، په هغه صورت کې چې:

a) هره آزمويل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي دوباره په همغه جيب کې اچوي.

b) هره آزمويل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي په بل جيب کې اچوي.